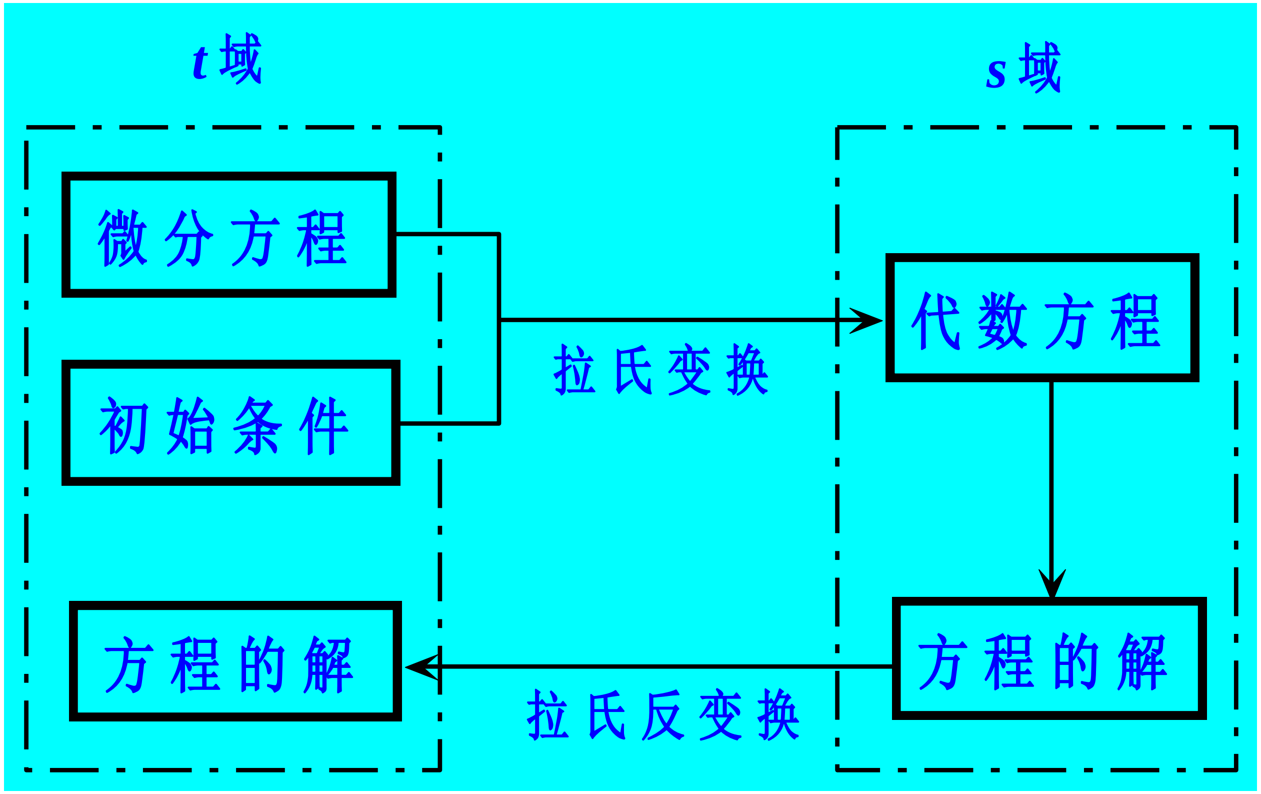
拉氏变换



用拉氏变换解微分方程示意图

一、 拉氏变换的定义

1. 定义

设函数$f(t)$在$t\geq 0$时有定义，如果线性积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \qquad (s=\sigma+\mathrm{j}\omega,\sigma>0)$$

存在，则由此积分所确定的函数可写为

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

{见课本P26 式（2-11）}

称其为函数$f(t)$的拉普拉斯变换，并记作

$$F(s)=L[f(t)]$$

$F(s)$称为$f(t)$的象函数，而$f(t)$称为$F(s)$的原函数，由象函数求原函数的运算称为拉氏反变换，记作

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]$$

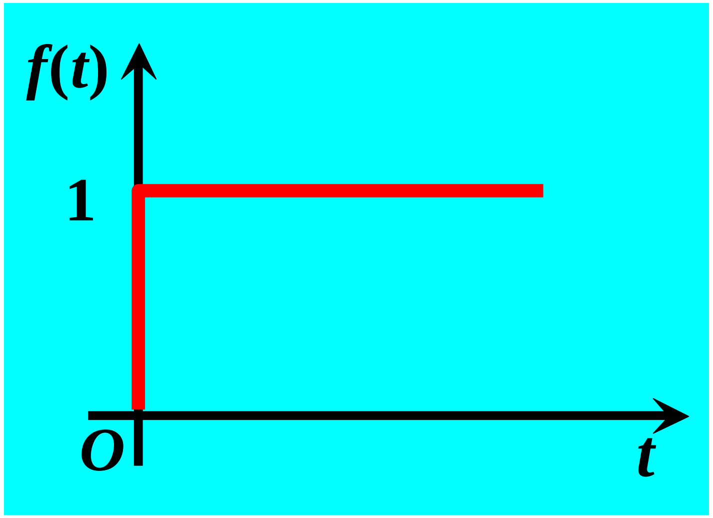
{见课本P26 式（2-12）}

二、几种典型函数的拉氏变换(P32 表2-3)

1.单位阶跃函数1(*t*)

数学表达式为

$$f(t)=1(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$



其拉氏变换为

$$F(s)=\mathrm{L}\,[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{s}[0-1]=\frac{1}{s}$$

4.指数函数e^{-at}

数学表达式为

$$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t\geqslant 0(a\text{为实数}) \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

其拉氏变换为

$$F(s)=\mathrm{L}\left[e^{-at}\right]=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{s+a}$$

5.正弦函数$\sin\omega t$ （P26例题2-3）

正弦函数定义为

$$\sin\omega t=\begin{cases}\sin\omega t & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

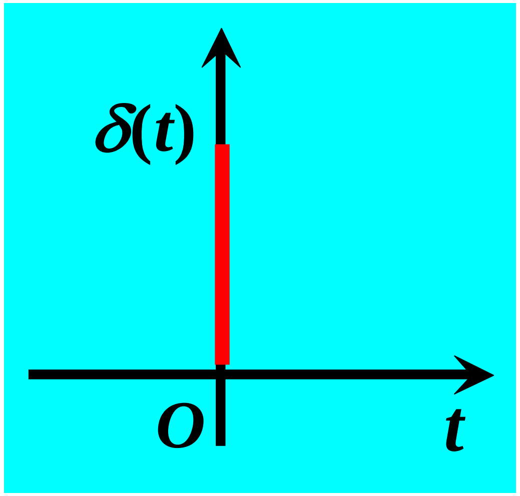
其拉氏变换为

$$F(s)=\mathrm{L}\,[\sin\omega t]=\int_0^{+\infty}\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

6. 单位脉冲函数(δ函数) 例题2-4



δ函数的表达式为

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}\qquad 且\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

其拉氏变换为

$$F(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{0_-}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=1$$

P27中间，不特别指出时，拉氏积分下限均为0_-。

三、拉氏变换定理

1. 线性性质

设$F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$，$F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$，$a$和$b$为常数，则有

$$L[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$$

2. 微分定理

设$F(s)=L[f(t)]$，则有

式中：$f(0)$，$f'(0)$，为$f(t)$及其一阶导数在$t=0$处的值。

一阶微分： $L[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

二阶微分： $L[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

当 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ 时的微分法则：

$$L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)$$

此时，

$$\frac{d}{dt}\rightleftharpoons s$$

即零初始条件下，时域中的微分运算对等于复数域中乘以s的运算。

3.积分定理 $$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$$

设$F(s)=L[f(t)]$，则有

$$L\left[\underbrace{\iint\cdots\int}_{n} f(t)dt^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0)$$

$$+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

当 $f^{(-n)}(0)=\cdots=f^{(-1)}(0)$ 时的积分法则：

$$L\left[f^{(-n)}(t)\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$$

4. 终值定理

若$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，且当$t\to\infty$时，$f(t)$存在一个确定的值，则其终值

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\lim_{t\to 0_+} f(t)=\lim_{s\to \infty} sF(s)$$

5. 位移定理

设$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则有

$$L\left[f(t-\tau_0)\right]=\mathrm{e}^{-\tau_0 s}F(s)$$

及

$$L\left[\mathrm{e}^{at}f(t)\right]=F(s-a)$$

分别称为实域中的位移定理和复域中的位移定理。

四、拉氏反变换（P34）

拉氏反变换的定义如下（P26 式2-12）

$$L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega}F(s)e^{st}dt$$

一般由$F(s)$求$f(t)$，常用部分分式法。

部分分式法: 首先将$F(s)$分解成一些简单的有理分式之和，然后由拉氏变换表一一查出对应的原函数，即可得F（s）的原函数$f(t)$。

F(s)的一般表达式为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{1\cdot s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

其中n>m,系数a_i、b_j均为实常数。

部分分式法

先将F(s)化成部分分式之和。

$$F(s)=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$ (无重根)

$$=\frac{C_1}{s-s_1}+\frac{C_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{s-s_i}$$

则

$$f(t)=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}+\cdots+C_ne^{s_nt}=\sum_{i=1}^{n}C_ie^{s_it}$$

其中

$$C_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)F(s)$$

例2.5　求 $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2+4s+3}$ 的拉氏反变换。

解：

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$=\frac{1/2}{s+1}+\frac{1/2}{s+3}$$

进行反变换得

$$f(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$$

II. 当 $A(s)=(s-s_1)^2(s-s_3)\cdots(s-s_n)=0$ 有二重根时

$$F(s)=\frac{C_2}{(s-s_1)^2}+\frac{C_1}{(s-s_1)^1}+\frac{C_3}{s-s_3}+\cdots+\frac{C_n}{s-s_n}$$

$$\begin{cases} C_2=\lim\limits_{s\to s_1}(s-s_1)^2.F(s) \\ C_1=\dfrac{1}{1!}\lim\limits_{s\to s_1}\dfrac{d}{ds}\left[(s-s_1)^2.F(s)\right] \end{cases}$$

$$f(t)=[C_2t+C_1].e^{s_1t}+\sum_{i=3}^{n}C_ie^{s_it}$$

例2-6 已知 $F(s)=\dfrac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$，求 $f(t)=?$

解. $F(s)=\dfrac{c_2}{(s+1)^2}+\dfrac{c_1}{s+1}+\dfrac{c_3}{s}+\dfrac{c_4}{s+3}$

$$C_2=\lim_{s\to-1}(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{-1+2}{(-1)(-1+3)}=-\frac{1}{2}$$

$$C_1=\frac{1}{1!}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}\right]=\lim_{s\to-1}\frac{s(s+3)-(s+2)[s+3+s]}{s^2(s+3)^2}=-\frac{3}{4}$$

$$C_3=\lim_{s\to0}s.\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{2}{3}$$

$$C_4=\lim_{s\to-3}(s+3)\frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}=\frac{1}{12}$$

$$F(s)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}.\frac{1}{s+1}+\frac{2}{3}.\frac{1}{s}+\frac{1}{12}.\frac{1}{s+3}$$

$$f(t)=-\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{2}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t}$$