第三章 线性系统的时域分析法

- 3-1 系统时间响应的性能指标
- 3-2 一阶系统的时域分析
- 3-3 二阶系统的时域分析
- 3-4 高阶系统的时域分析
- 3-5 线性系统的稳定性分析
- 3-6 线性系统稳态误差的计算

3-1 系统时间响应的性能指标

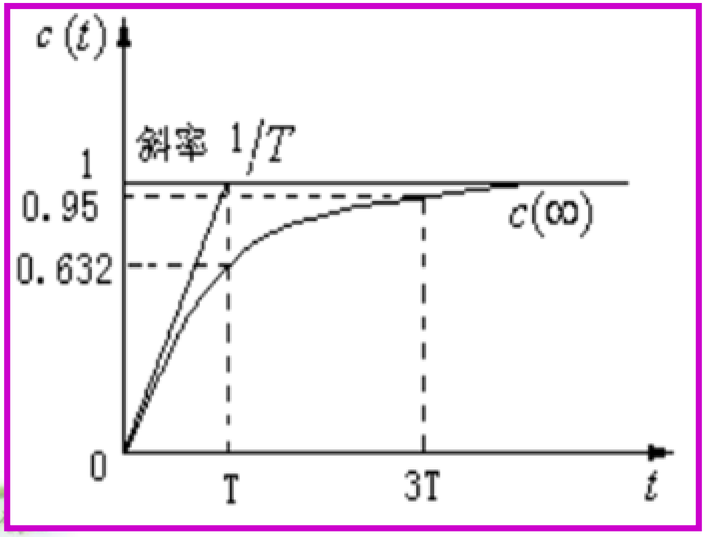
1.典型输入信号

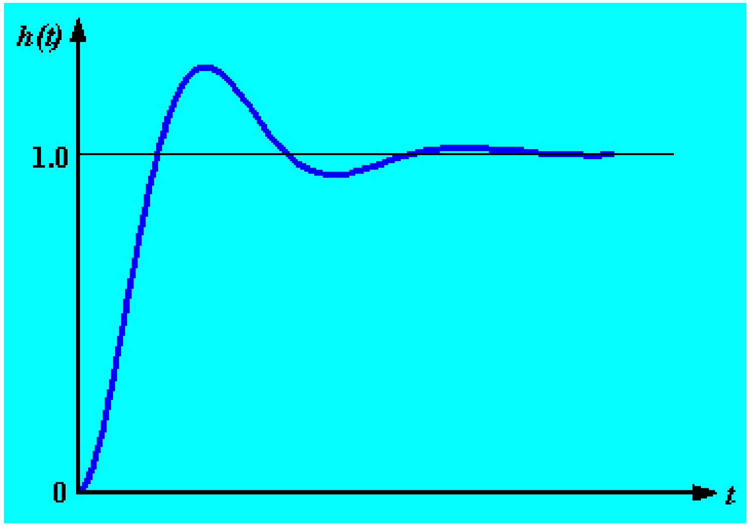
名称	时域表达式	复域表达式
单位阶跃	$1(t), t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
单位斜坡	$t, t \geq 0$	$\frac{1}{s^2}$
单位加速度	$\frac{1}{2}t^2, t \geq 0$	$\frac{1}{s^3}$
单位脉冲	$\delta(t), t = 0$	1
正弦函数	$A\sin\omega t$	$\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

2、动态过程和稳态过程

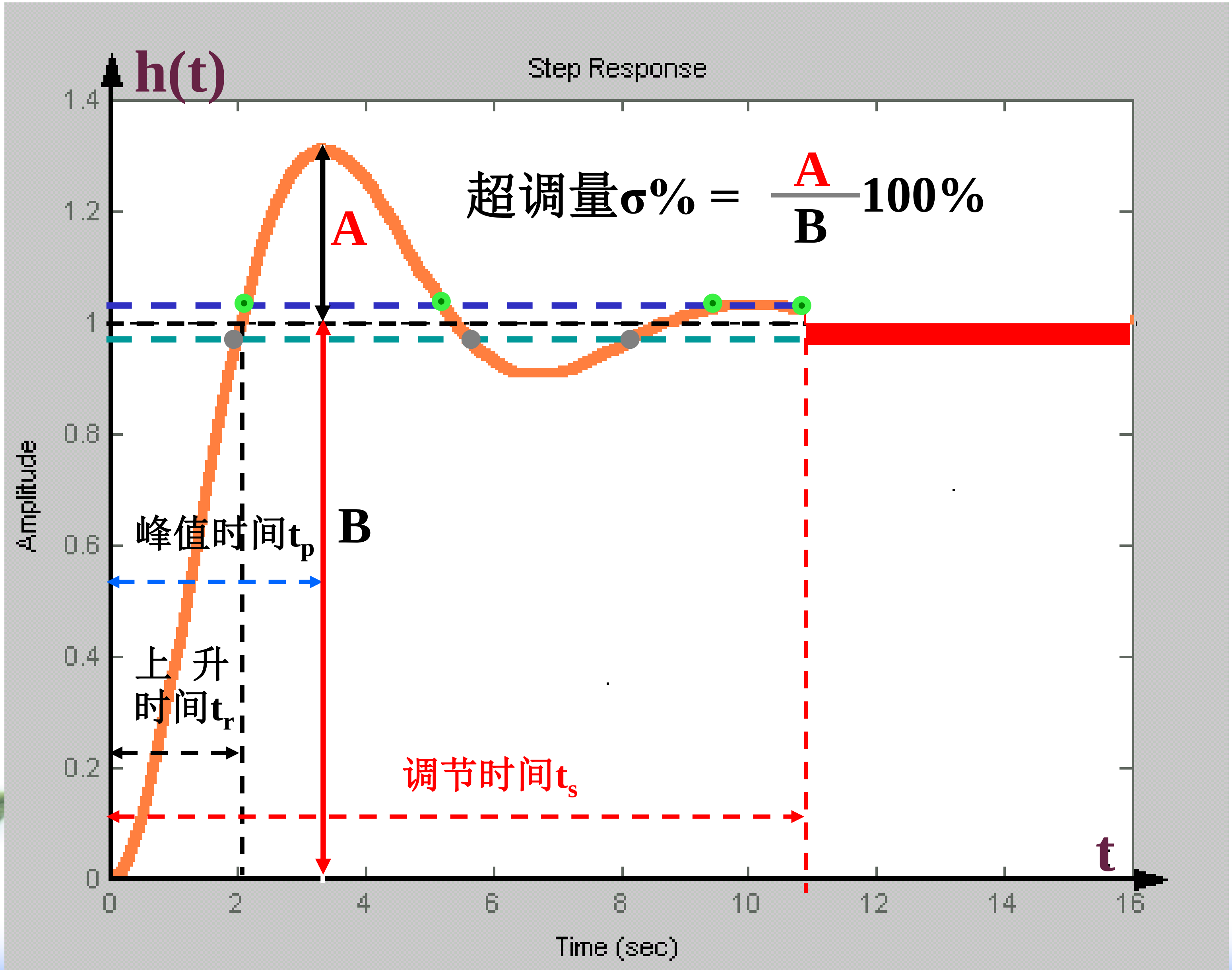
1、系统的时间响应，由**动态过程**和**稳态过程**两部分组成。

与此对应，性能指标分为**动态性能指标**和**稳态性能指标**。



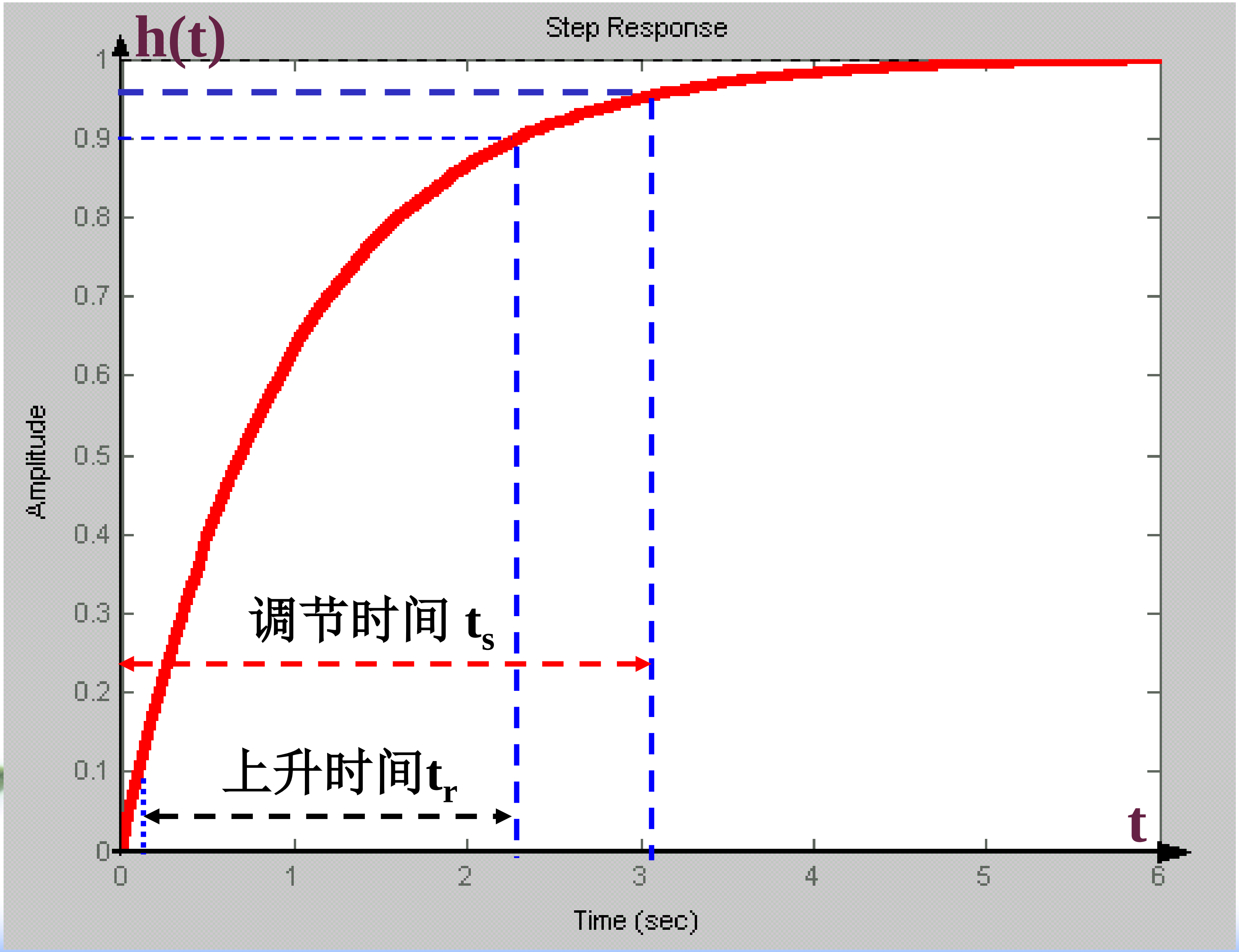


动态性能指标定义1



h(t)
Step Response
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Amplitude
0 2 4 6 8 10 12 14 16
Time (sec)
t
A
B
超调量σ% = A/B 100%
峰值时间t_p
上 升
时间t_r
调节时间t_s

动态性能指标定义2


Step Response
h(t)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Amplitude
调节时间 t_s
上升时间t_r
t
0
1
2
3
4
5
6
Time (sec)

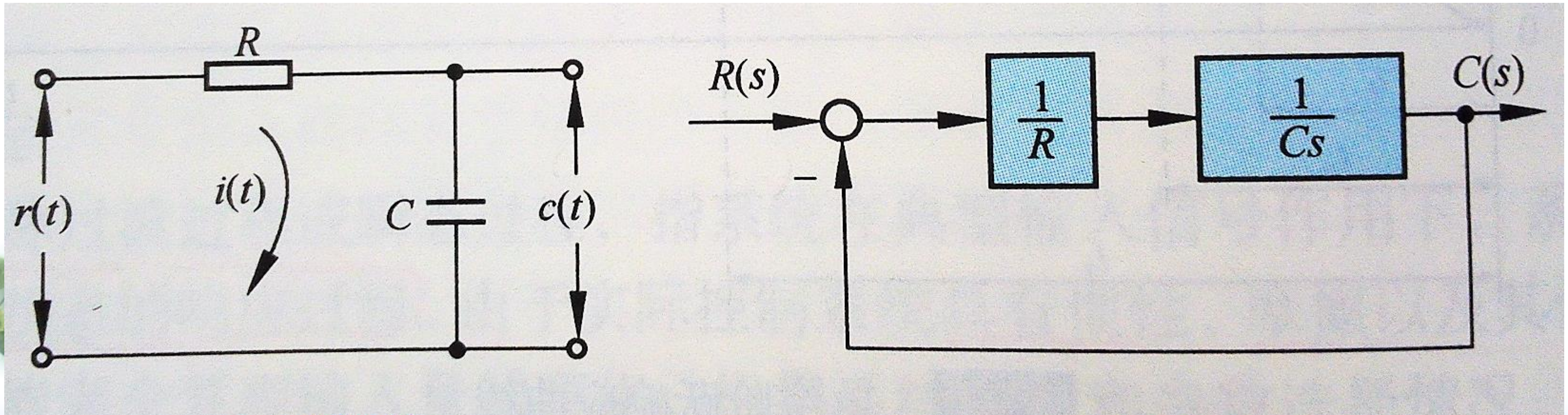
3-2 一阶系统的时域分析

1、一阶系统数学模型

微分方程 $$Tc'(t)+c(t)=r(t)$$

其传递函数 $$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

T为一阶系统时间常数。

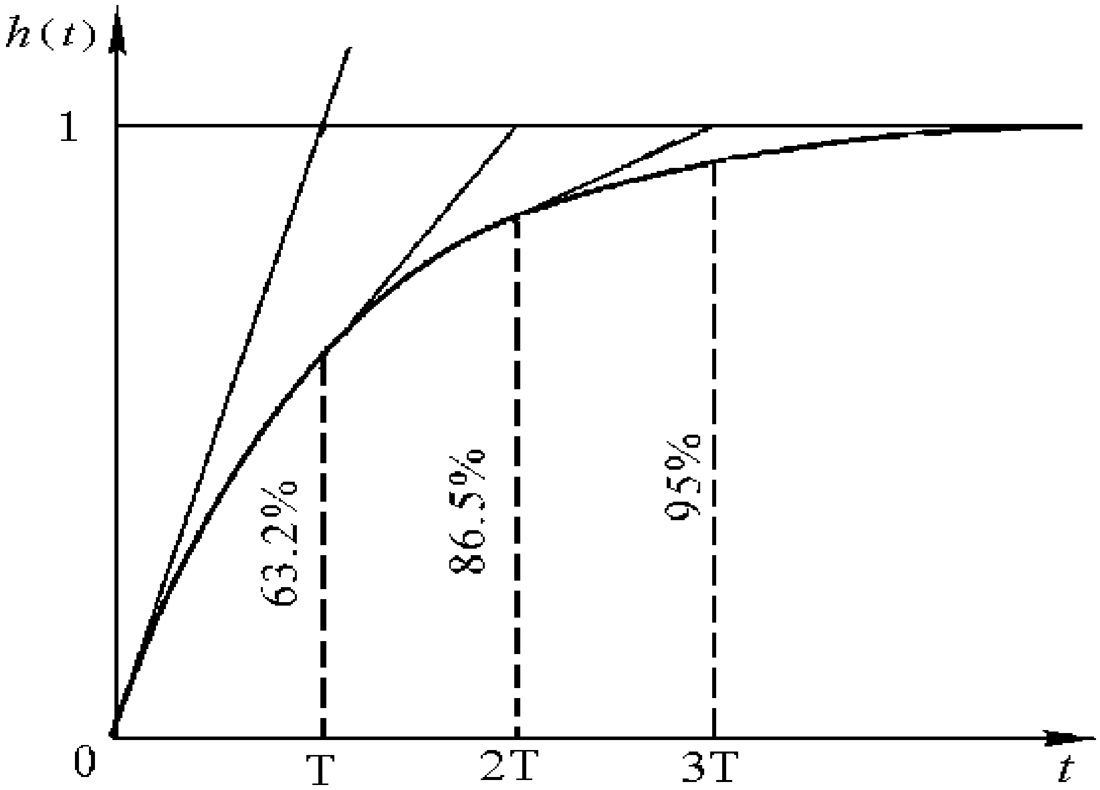


(a) 电路图 (b) 结构图

2、一阶系统单位阶跃响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{1}{s(Ts+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$c(t)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$



$$c'(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$$

$$c'(0)=\frac{1}{T}$$

稳态分量与瞬态分量

t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	…	∞
$c(t)$	0	0.632	0.865	0.950	0.982	0.993		1

特点：

（1）可用T去度量系统输出量的数值。t=T时上升到稳态值的63.2%，……

（2）响应曲线的斜率初始值为1/T；并随着时间的推移而下降为0.

性能指标：

（1）上升时间：$t_r=2.20T$

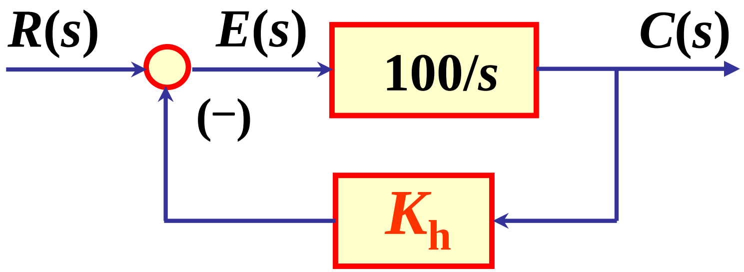
（2）调节时间：

$t_s=3T$ (△=0.05)

$t_s=4T$ (△=0.02)

（3）超调和稳态误差均为零. （T反应系统惯性的大小）

例 某一阶系统如图,(1) 求调节时间t_s, (2) 若要求t_s=0.1s, 求反馈系数 K_h .



解:

(1)

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{100/s}{1+(100/s)\times 0.1}=\frac{100}{s+10}=\frac{10}{1+s/10}$$

- 与标准形式对比得：T=1/10=0.1，t_s=3T=0.3s

- (2)

$$\Phi(s)=\frac{100/s}{1+K_h\cdot 100/s}=\frac{1/K_h}{1+s/100K_h}$$

- $T=\dfrac{1}{100K_h}$ 按要求$t_s=\dfrac{3}{100K_h}=0.1$ 得 $K_h=0.3$

- 解题关键：化闭环传递函数为标准形式。

3、一阶系统单位脉冲响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{1}{Ts+1}=\frac{1/T}{s+1/T}$$

$$c(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\quad(t\geq 0)$$

4、一阶系统单位斜坡响应

$$r(t)=t,R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$C(s)=\phi(s)R(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

$$c(t)=t-T+Te^{-t/T}$$

三种响应之间的关系

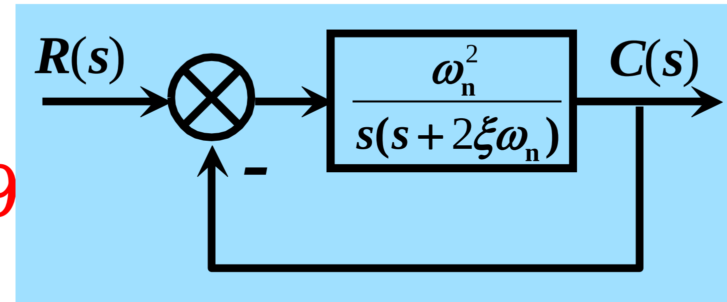
输入	输出
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-t/T}$
$1(t)$	$1-e^{-t/T}$
t	$t-T(1-e^{-t/T})$

结论：对于线性定常系统，在零初始条件下，若输入信号间呈导数或积分的关系，则其对应输出之间也呈导数或积分的关系。积分时，积分时间常数由c(0)=0确定。对应课本P87页表3-2旁边。

3.3 二阶系统的时域分析

传递函数分母为二次多项式的系统，称为二阶系统。

一、二阶系统的数学模型



闭环传递函数标准式（P89

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}\left(\omega_n=\frac{1}{T}\right)$$

其中： ζ **为阻尼比**

ω_n**为自然频率/无阻尼振荡频率**

T**为时间常数**

特征方程： $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2=0$

特征根： $s_{1.2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

2、二阶系统单位阶跃响应

$$C(s)=\Phi(s)R(s)=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)-s(s+2\zeta\omega_n)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

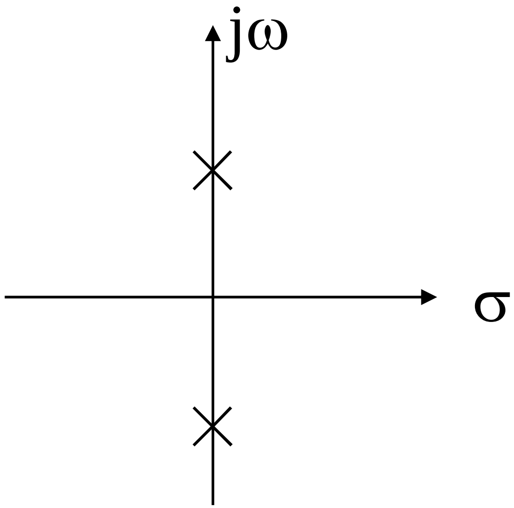
$$=\frac{1}{s}+\boxed{\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}}$$

$$c(t)=1+c_1e^{s_1t}+c_2e^{s_2t}$$

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

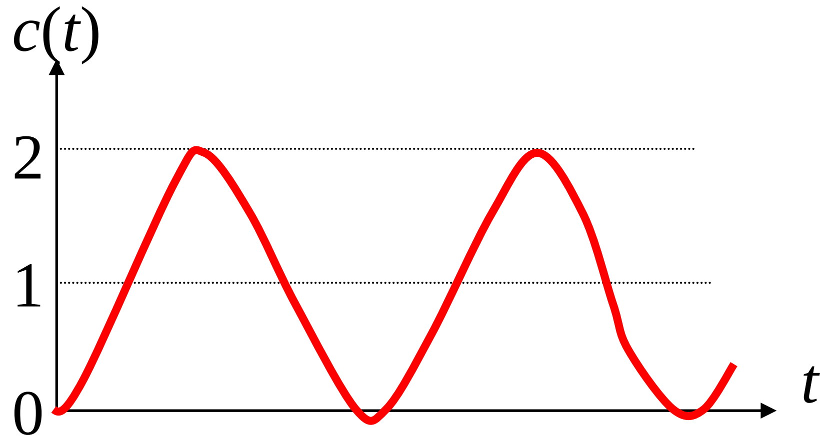
当 ζ=0时，称无阻尼系统

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



ξ=0

$$c(t)=1-\cos\omega_n t$$ P91（3-15）



系统具有：

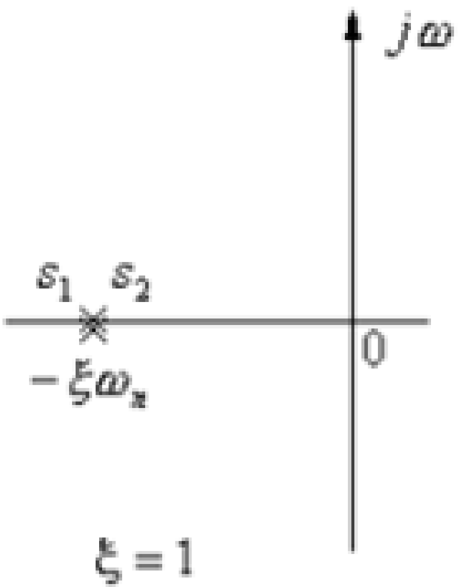
一对纯虚根。

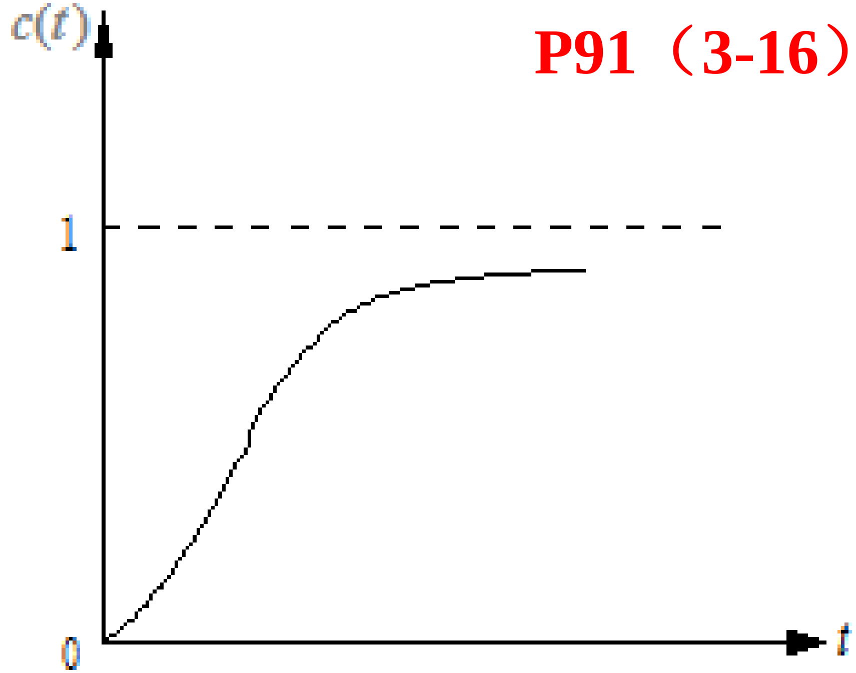
等幅振荡

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

当 $\zeta = 1$ 时，称临界阻尼

$$c(t) = 1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t}$$





P91（3-16）

系统具有：

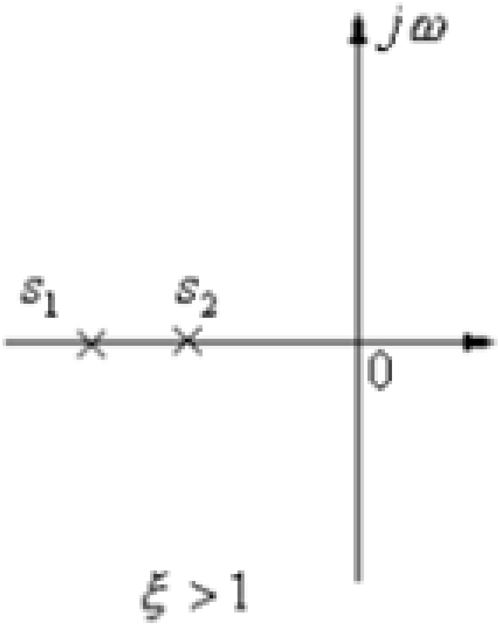
一对相同的负实数根。

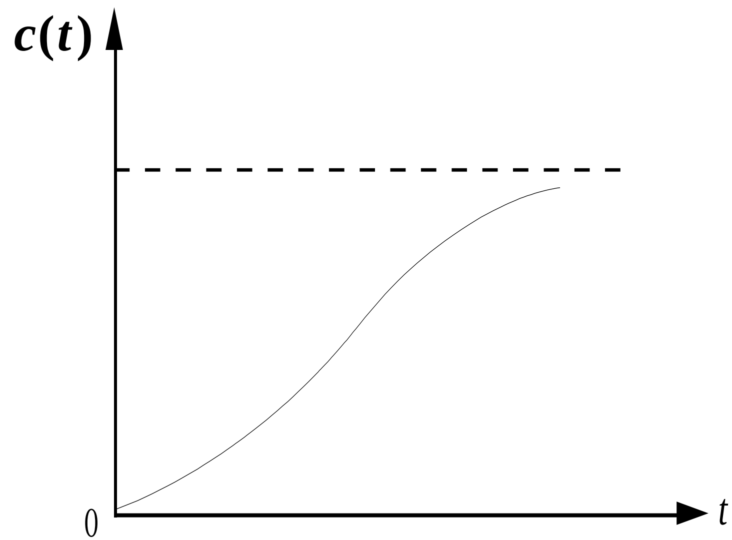
可见：临界阻尼的单位阶跃响应为非周期单调上升过程。

当 $\zeta > 1$ 时，称过阻尼

$$c(t) = 1 + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

P92（3-17）





系统具有：

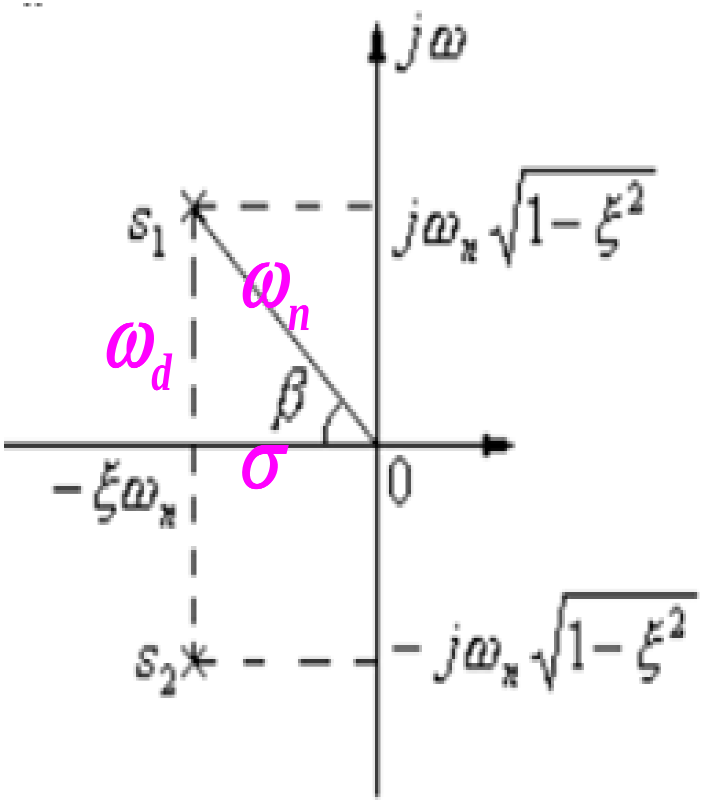
一对不相同的负实数根。

单调上升到稳态值，比临界阻尼情况上升的更慢。

$0<\zeta<1$: 欠阻尼系统

P92页 图3-11

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \triangleq -\sigma \pm j\omega_d$$



$$\begin{cases} \omega_d & \text{虚部绝对值} \quad \text{:阻尼振荡频率} \\ \sigma & \text{实部绝对值} \quad \text{:衰减系数} \end{cases}$$

$\cos\beta=\zeta$ ： 阻尼角

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{1}{s}-\frac{s+2\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}$$

单位阶跃响应：

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+2\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}$$

$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\frac{\sigma}{\omega_d}.\omega_d}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\sigma}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\sigma)^2+\omega_d{}^2}$$

$$c(t)=1-e^{-\sigma t}\left[\cos\omega_d t+\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right]$$

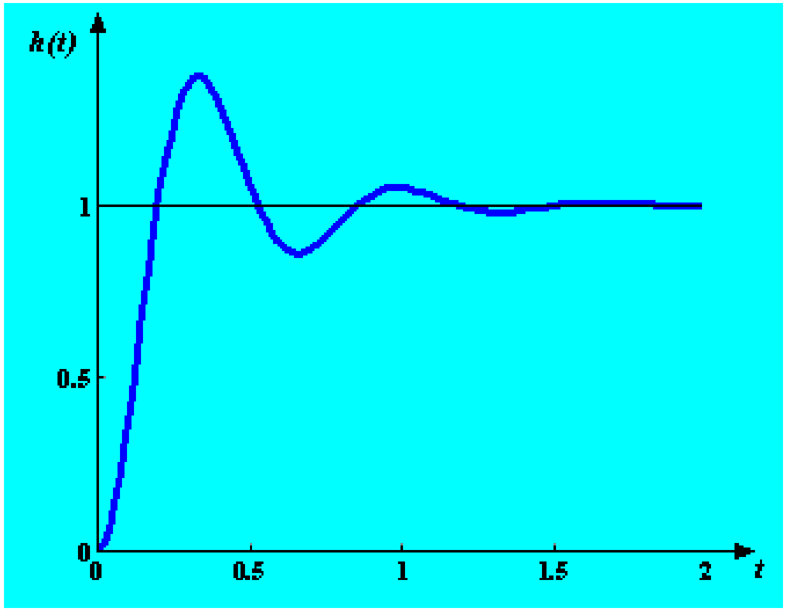
$$=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\underbrace{\sqrt{1-\zeta^2}}_{\sin\beta}\cos\omega_d t+\underbrace{\zeta}_{\cos\beta}\sin\omega_d t\right]$$

P91（3-14）

$$=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t+\beta)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sin\beta}\sin(\omega_d t+\beta)$$

单位阶跃响应：

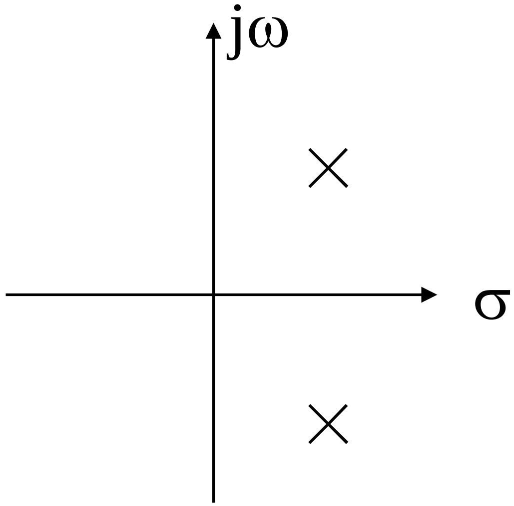
$$c(t)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sin\beta}\sin(\omega_d t+\beta)$$



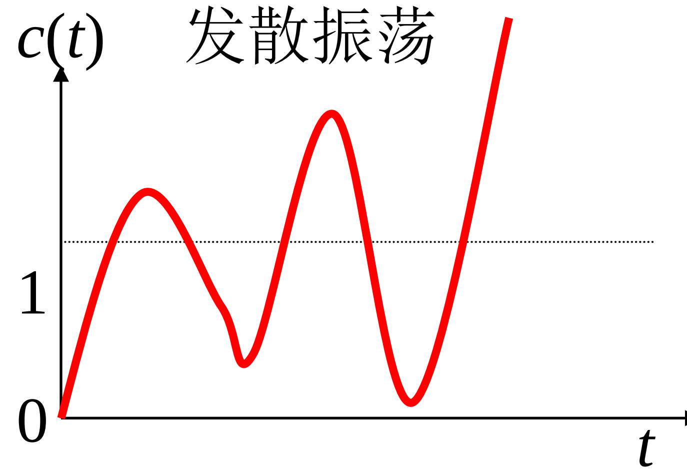
◆特征根的实部绝对值σ决定了瞬态分量衰减的快慢，即特征根距虚轴越远衰减越快；

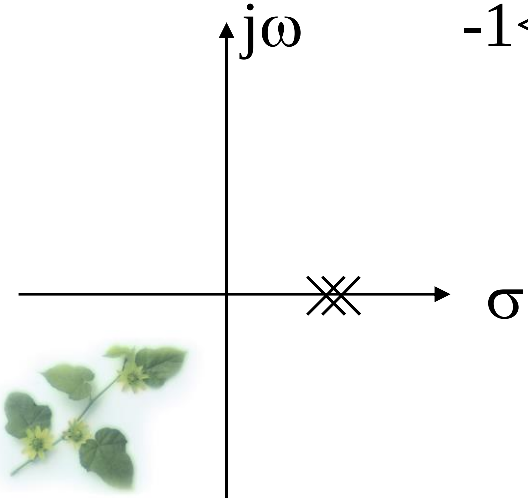
◆特征根的虚部绝对值ω_d决定了瞬态分量震荡的频率。

当ξ<0时，是负阻尼系统，系统不稳定。

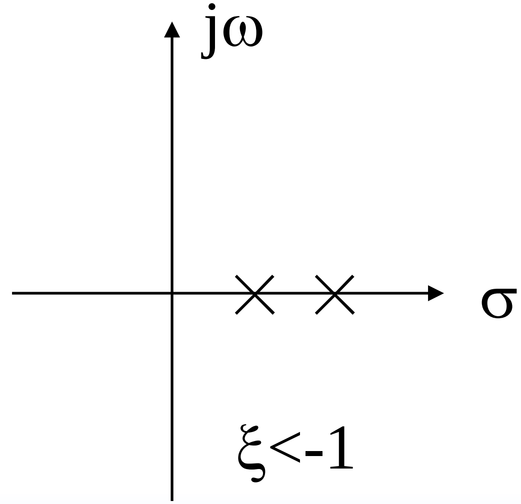


-1<ξ<0





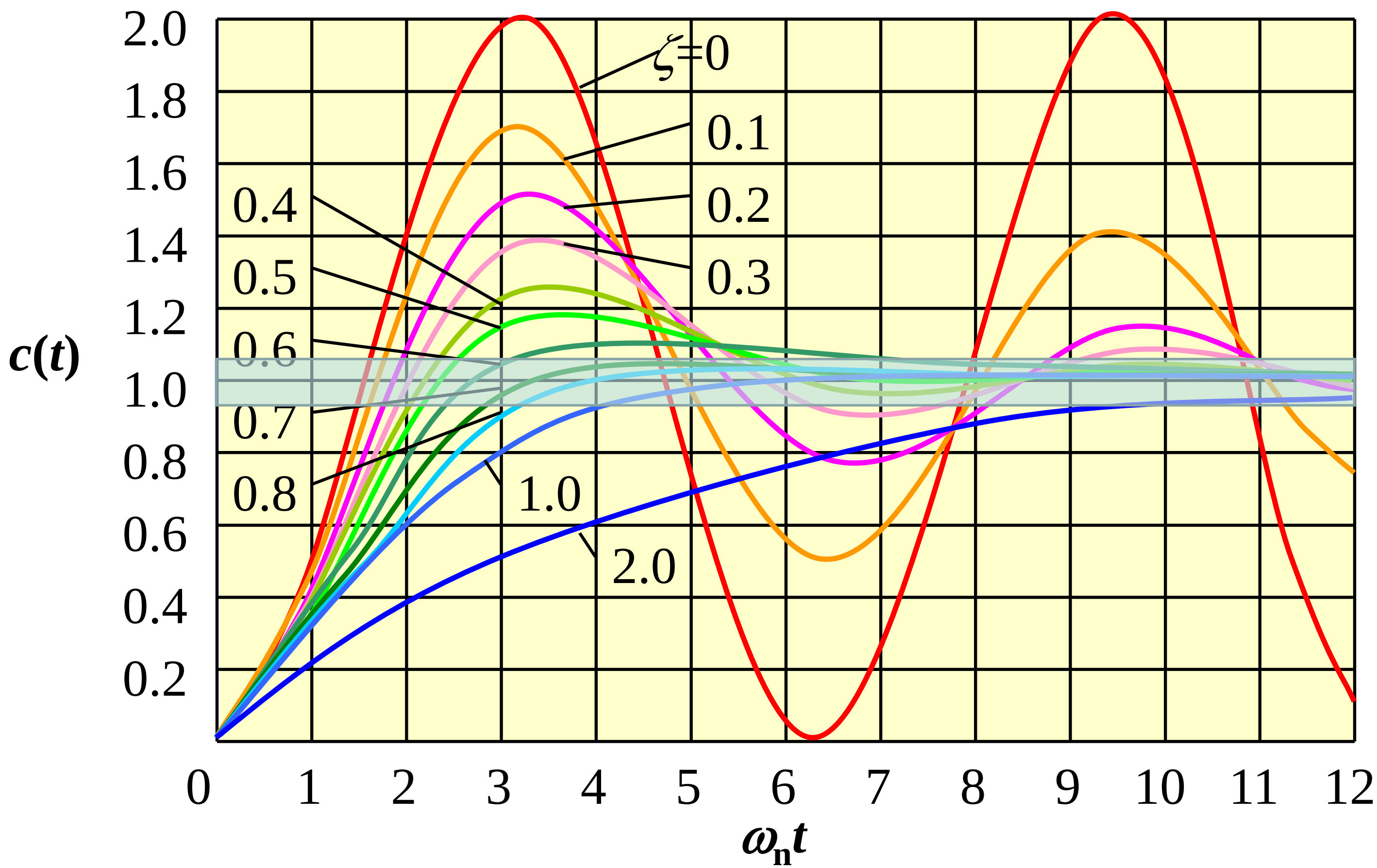
ξ =-1



ξ<-1

两个特征根位于S右半平面，系统响应发散。

P92 图3-10



- **超调量:ζ越小，上升时间越短，超调量越大，平稳性越差;**
- **调节时间: ζ从0→0.7时, t_s变短；ζ从0.7→2时, t_s变长;**
- **ζ=0.7，调节时间最短，超调量σ%<5%，即快速性和平稳性均较好，故称ζ=0.7为最佳阻尼比。二阶系统的设计常取ζ=0.4~0.8。**

3、欠阻尼二阶系统的动态过程分析

$$c(t)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sin\beta}\sin(\omega_d t+\beta)\qquad(0<\zeta<1)$$

动态性能指标：

（1）t_r：　令$c(t)=1$　$\therefore t_r=\dfrac{\pi-\beta}{\omega_d}$　P93（3-19）

（2）t_p：　令$c'(t)=0$　$\therefore t_p=\dfrac{\pi}{\omega_d}$　P93（3-20）

（3）$\sigma\%$：

$$\sigma\%=\frac{c(t_p)-1}{1}\times100\%$$

$$\sigma\%=e^{-\sigma t_p}\times100\%=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\times100\%$$

P93（3-21）

可见： $\sigma\%$仅与ζ有关，与ω_n无关，且$\zeta\uparrow\rightarrow\sigma\%\downarrow$

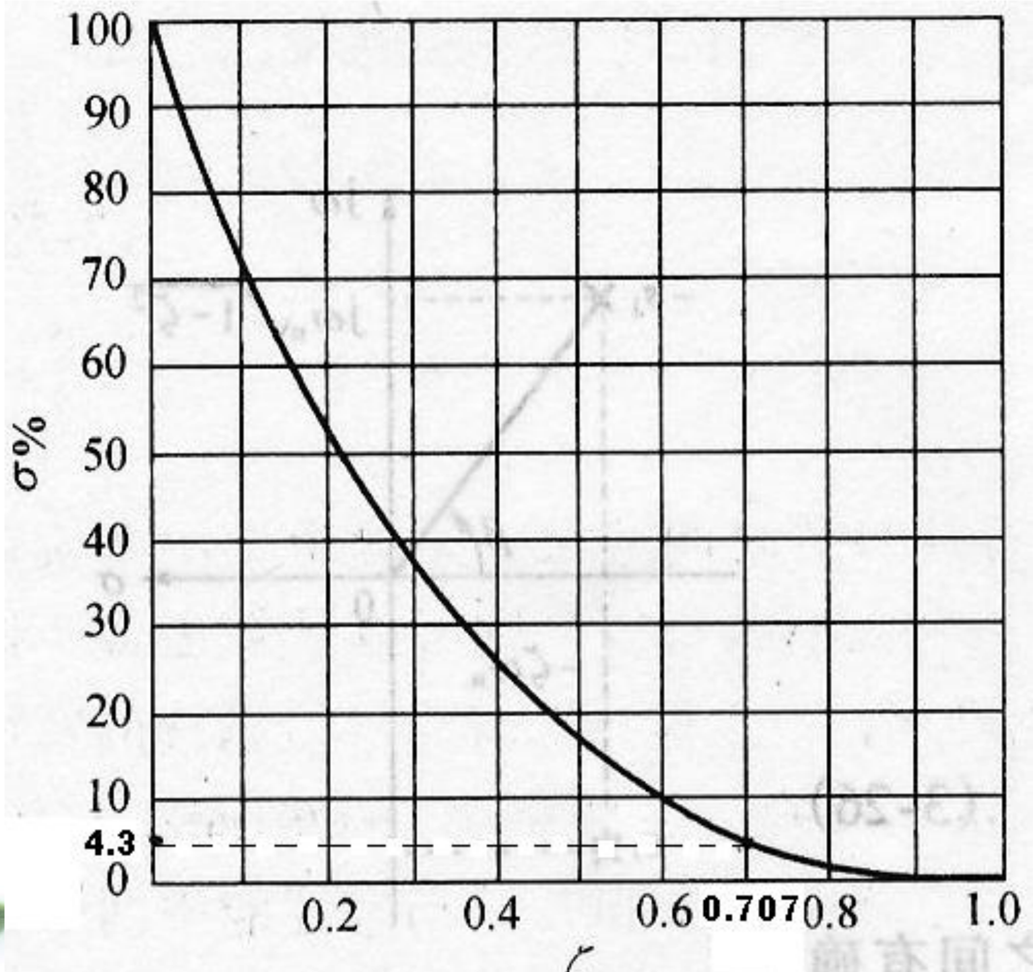


图 3-12 $\sigma\%$和ζ的关系

$\zeta=0.8, \sigma\%=1.5\%$

$\zeta=0.707, \sigma\%=4.3\%$

$\zeta=0.6, \sigma\%=10\%$

$\zeta=0.5, \sigma\%=16.3\%$

$\zeta=0.4, \sigma\%=25.4\%$

$$c(t)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sin\beta}\sin(\omega_d t+\beta)\qquad(0<\zeta<1)$$

(4) t_s: $|c(t_s)-c(\infty)|\le\Delta\times c(\infty)$

$$\left|\frac{e^{-\sigma t}}{\sin\beta}\sin(\omega_d t+\beta)\right|\le\Delta\ \Rightarrow\left|\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right|\le\Delta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_s\approx\dfrac{3.5}{\zeta\omega_n}=\dfrac{3.5}{\sigma} & (\Delta=0.05)\\[2ex] t_s\approx\dfrac{4.4}{\zeta\omega_n}=\dfrac{4.4}{\sigma} & (\Delta=0.02)\end{cases}$$

P95（3-22）

P95（3-23）

例3-1 系统结 %=20%，t_p=1s

（1）确定K

（2）计算上

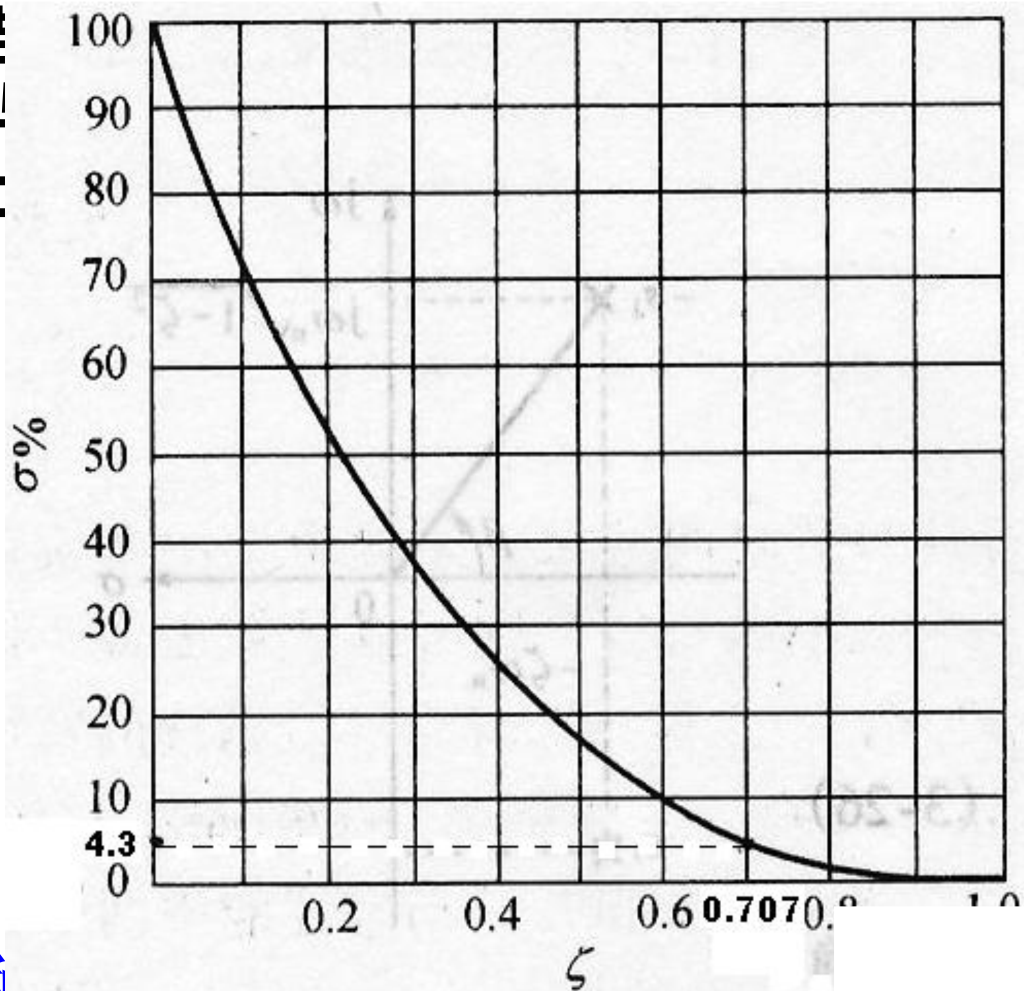


图 3-16 σ%和ζ的关系

闭环传递函

$$\frac{\quad}{R(s)}=\frac{\quad}{s^2+(1+K\tau)s+K}$$

$$\left.\begin{aligned}\zeta=\frac{\ln\frac{1}{\sigma}}{2\sqrt{\pi^2+(\ln\frac{1}{\sigma})^2}}=0.46,\\ t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=1\Rightarrow\omega_d=\pi\end{aligned}\right\}\Rightarrow\omega_n=3.54(rad/s)$$

$$\begin{cases}\omega_n=\sqrt{K}\\ 2\zeta\omega_n=1+K\tau\end{cases}\Rightarrow K=12.53,\tau=0.18$$

$$\beta=\arccos\zeta=1.09(rad)$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=0.65(s),t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=2.15(s)$$

4. 过阻尼系统的动态性能指标(自学)

- （1） t_r
- （2） t_s

$$t_r = \frac{1 + 1.5\zeta + \zeta^2}{\omega_n}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$(a)\ T_1 = T_2 \Rightarrow t_s = 4.75 T_1$$

$$(b)\ T_1 \geq 4T_2 \Rightarrow t_s = 3T_1$$

（b）的相对误差不超过10%

5、二阶系统的性能改善（自学）

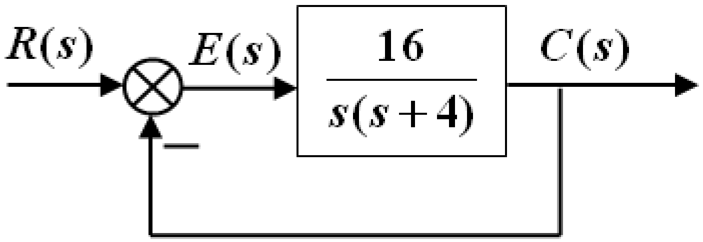
改善二阶系统性能的两种方法：

（1）比例-微分控制 （P98 图3-18；P101最后一段）

（2）测速反馈控制（P102 图3-21；P103

（3）比例-微分控制与测速反馈控制的比较）

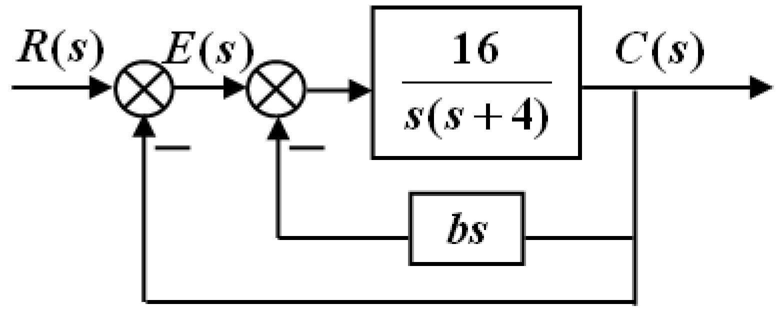
提高系统性能的措施



（a）原系统

$$\Phi(s)=\frac{16}{s^2+4s+16}$$

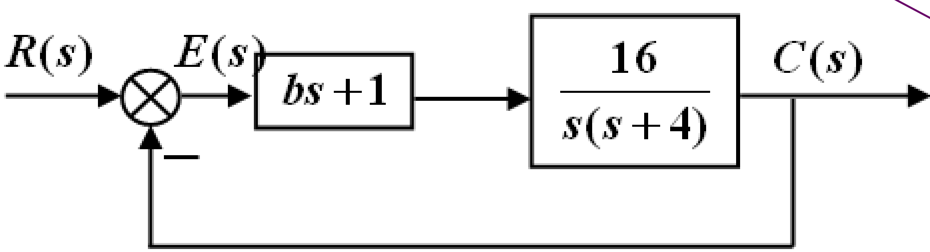
$$G_K(s)=\frac{16}{s(s+4)},K=4$$



（c）增加测速反馈控制

$$\Phi(s)=\frac{16}{s^2+(4+16b)s+16}$$

$$G_K(s)=\frac{16}{s(s+4+16b)},K=\frac{16}{4+16b}$$



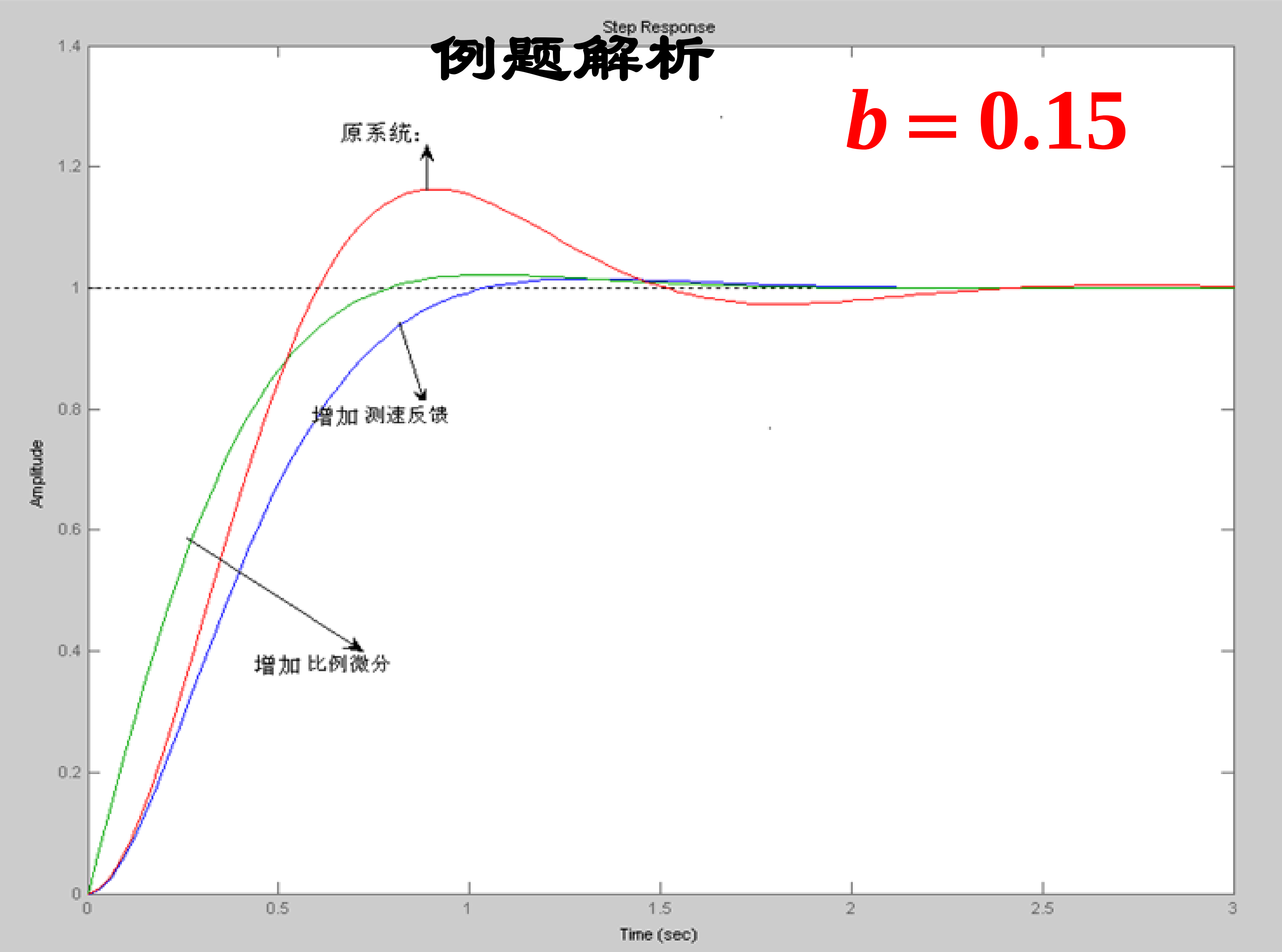
（b）增加比例微分控制

$$\Phi(s)=\frac{16(bs+1)}{s^2+(4+16b)s+16}$$

$$G_K(s)=\frac{16(bs+1)}{s(s+4)},K=4$$

例题解析

$b = 0.15$


Step Response
原系统:
增加测速反馈
增加比例微分
Amplitude
Time (sec)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
0.5
1.5
2
2.5
3

作业

- P133
- 3-3
- 3-6

3-4 高阶系统的时域分析

1.高阶系统的单位阶跃响应

例3-5 设三阶系统闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{5(s^2+5s+6)}{s^3+6s^2+10s+8}$$

试确定其单位阶跃响应。

解：

$$\Phi(s)=\frac{5(s+2)(s+3)}{(s+4)(s^2+2s+2)}$$

单位阶跃作用下的输出为

$$C(s)=\frac{5(s+2)(s+3)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

其部分分式为

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1}{s+4}+\frac{A_2}{s+1+j}+\frac{\overline{A}_2}{s+1-j}$$

拉氏反变换并整理得

$$c(t)=\frac{1}{4}(15-e^{-4t}-10\sqrt{2}e^{-t}\cos(t+352^{\circ}))$$

课本P105页上式出错，且A_1=—1/4。

可见：高阶系统的瞬态响应是一阶系统和二阶系统的运动模态的叠加。各瞬态分量衰减的快慢取决于对应极点离虚轴的距离。

2. 高阶系统闭环主导极点及其动态性能分析

1、闭环主导极点

如果在所有的闭环极点中，距离虚轴最近的极点周围没有闭环零点，而其他极点又远离虚轴，那么距离虚轴最近的闭环极点对应的响应分量，随时间的推移衰减缓慢，在系统的时间响应过程中起主导作用，这样的闭环极点就称为闭环主导极点。其他极点统称为非主导极点。

主导极点可以是实数也可以是复数，或者二者的组合。

经常用主导极点来估算高阶系统性能指标

偶极子：
靠得很近，作用可以相互抵消的闭环零极点对。

例： 某系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)} \qquad s_1=-10,\ s_{2,3}=-1\pm j,$$

其单位阶跃响应为：

$$c(t)=1-0.024e^{-10t}-1.55e^{-t}\sin(t+39^\circ)$$

$$\approx 1-1.55e^{-t}\sin(t+39^\circ)$$

主导极点：$S_{2,\,3}$，非主导极点：S_1。

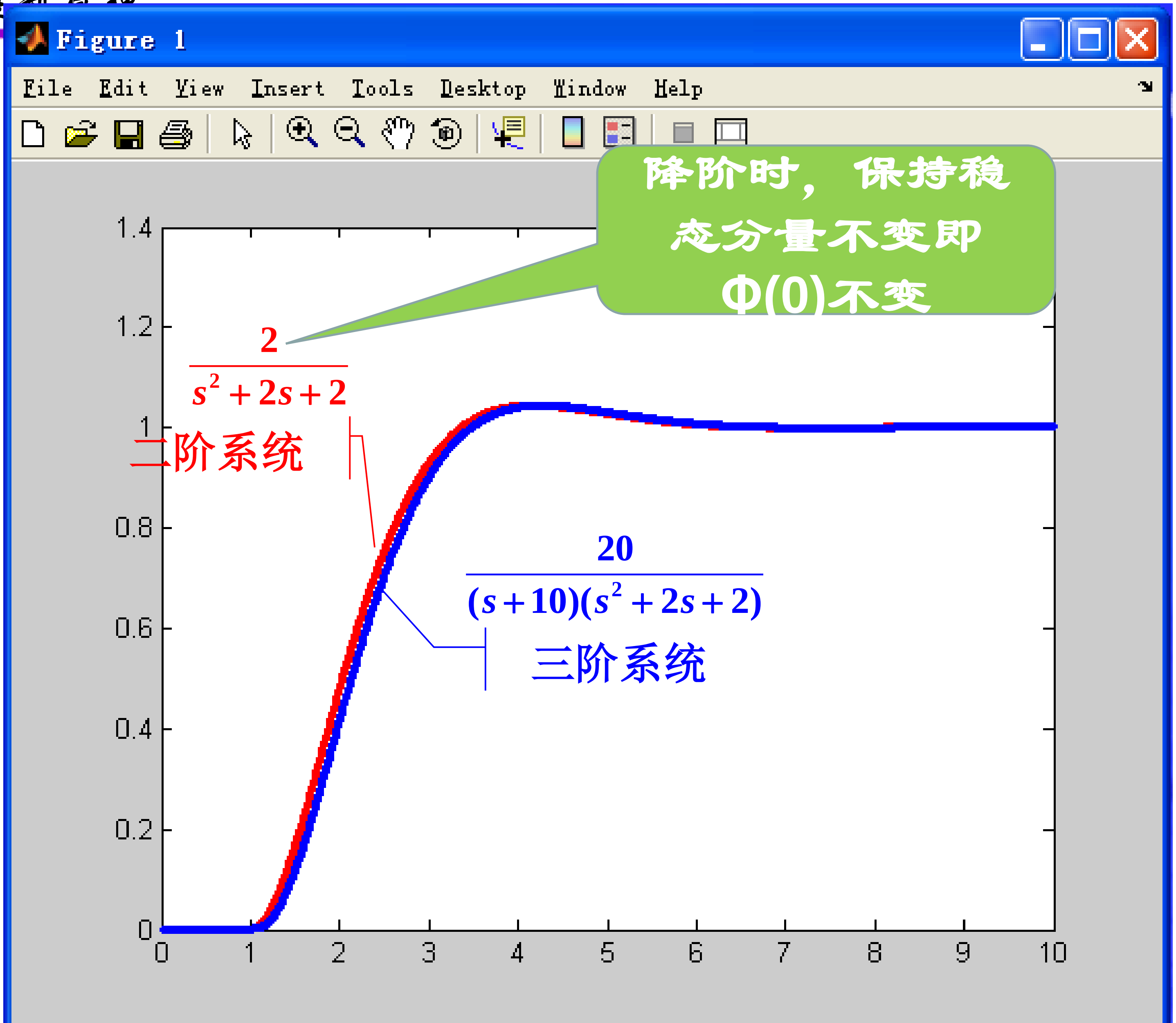


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
降阶时，保持稳态分量不变即Φ(0)不变
$\frac{2}{s^2+2s+2}$
二阶系统
$\frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)}$
三阶系统
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

例3-6：某系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1.05(0.4762s+1)}{(0.125s+1)(0.5s+1)(s^2+s+1)}$$

可化为：

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{8(s+2.1)}{(s+8)(s+2)(s^2+s+1)}$$

偶极子： $z_1=-2.1,\ s_1=-2$

非主导极点： $s_2=-8$

主导极点： $s_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

系统可降阶为：

$$\Phi(s)=\frac{1.05}{s^2+s+1}$$

$$\omega_n=1, \zeta=0.5$$

估算原系统性能指标：

$$t_s=\frac{3.5}{\zeta\omega_n}=7 \qquad \sigma\%=16.3\%$$

但高阶系统毕竟不是二阶系统，因而在降阶处理后，还需要考虑其他非主导闭环零极点对系统动态性能的影响。

表 3-3 高阶系统动态性能分析比较

系统编号	系统闭环传递函数	上升时间 t_r/s	峰值时间 t_p/s	超调量 σ /%	调节时间 t_s/s(Δ=2%)
1	$\dfrac{1.05}{(0.125s+1)(0.5s+1)(s^2+s+1)}$	1.89	4.42	13.8	8.51
2	$\dfrac{1.05(0.4762s+1)}{(0.125s+1)(0.5s+1)(s^2+s+1)}$	1.68	3.75	15.9	8.20
3	$\dfrac{1.05(s+1)}{(0.125s+1)(0.5s+1)(s^2+s+1)}$	1.26	3.20	25.3	8.10
4	$\dfrac{1.05(0.4762s+1)}{(0.25s+1)(0.5s+1)(s^2+s+1)}$	1.73	4.09	15.0	8.36
5	$\dfrac{1.05(0.4762s+1)}{(0.5s+1)(s^2+s+1)}$	1.66	3.64	16.0	8.08
6	$\dfrac{1.05}{s^2+s+1}$	1.64	3.64	16.3	8.08

闭环零点影响（P107下部）

1）减小上升时间和峰值时间，使系统响应速度加快；

2）超调量增大，使系统平稳性变差；（减小阻尼）

3）这种作用将随闭环零点接近虚轴而加剧。

闭环非主导极点影响（P108上部）

1）与 2）同零点相反；（增大阻尼）

3）这种作用将随闭环非主导极点接近虚轴而加剧。

若闭环零极点彼此接近，则它们对系统响应速度的影响会相互削弱。