

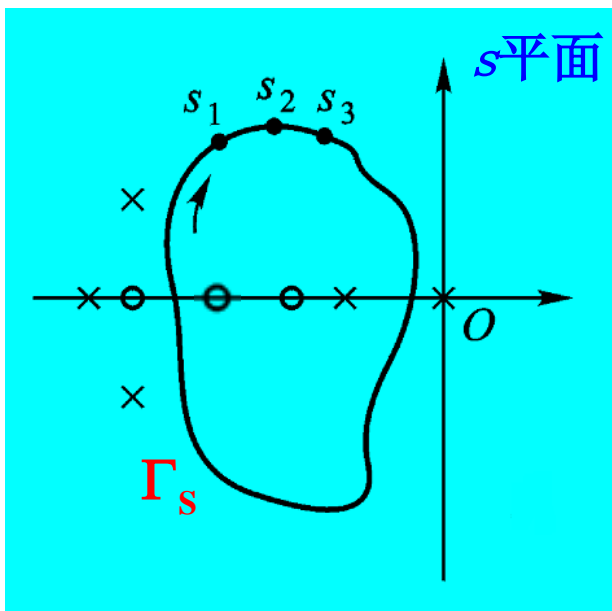
## 5-3 频域稳定判据

奈氏 (Nyquist) 判据和对数频率稳定判据（奈氏判据在伯德图上的应用）是常用的两种频域稳定判据。

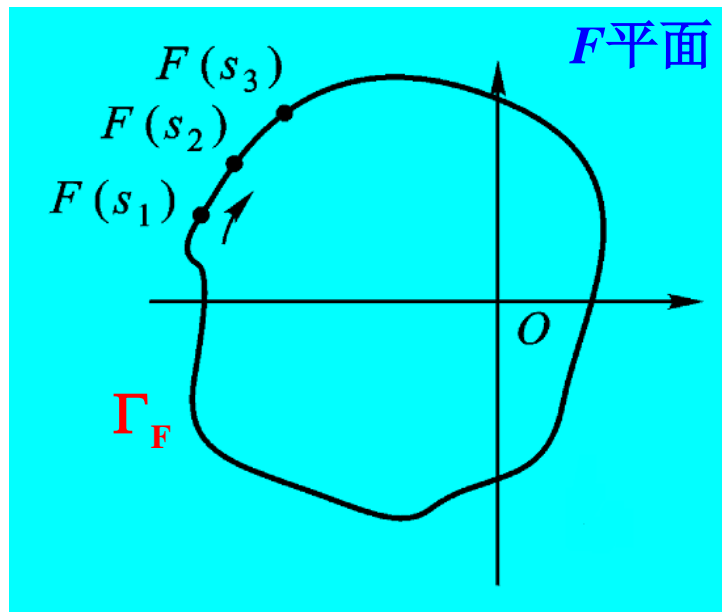
频域稳定判据的特点是根据开环系统频率特性曲线判定闭环系统的稳定性。

# 1、奈氏判据的数学基础

## (1) 辐角原理/映射定理



映射



$F(s)$  为  $s$  的有理分式函数。  $s$  平面描述自变量  $s$  的取值，  $F$  平面描述函数  $F(s)$  的取值情况。

辐角原理：若 $\Gamma_s$ 包围了 $F(s)$ 的 $Z$ 个零点和 $P$ 个极点，当 $s$ 顺时针沿 $\Gamma_s$ 取值一周时， $\Gamma_F$ 绕原点转过 $R$ 圈。其中

$$R = P - Z$$

$R > 0$ , 逆时针包围原点;  $R < 0$ , 顺时针;  $R = 0$ , 不包围。

(注意:  $\Gamma_s$ 不穿过 $F(s)$ 的零极点)

判别系统的稳定性实质就是判别系统在 $s$ 右半平面有无闭环极点。

那么如何将辐角定理应用于稳定性判别?

(2) 选取辅助函数  $F(s)$

$$F(s) = 1 + G(s)H(s)$$

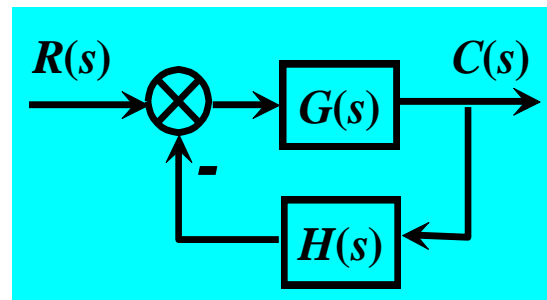
假设  $G(s)H(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  则

$$F(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)}$$

$F(s)$  的特点:

1)  $F(s)$  的零点: 闭环极点

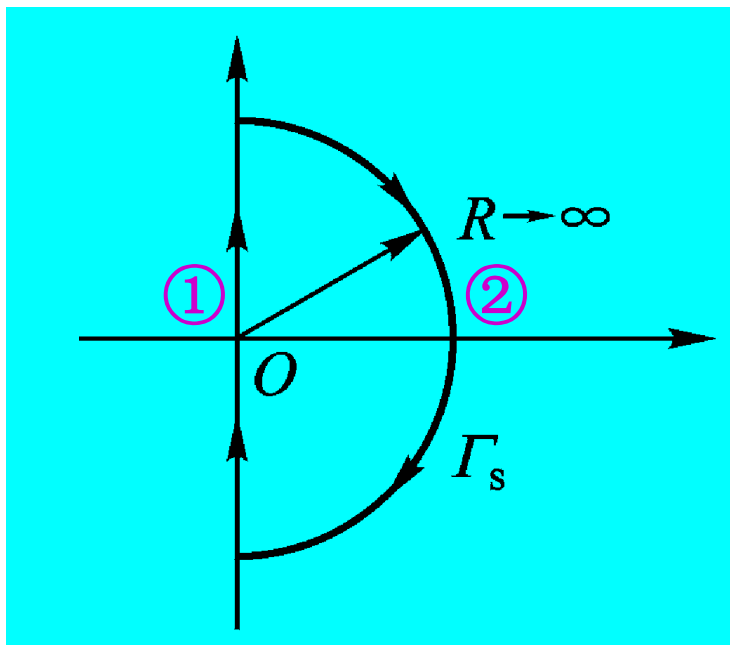
$F(s)$  的极点: 开环极点



2)  $\Gamma_F$  曲线和  $\Gamma_{GH}$  曲线只相差一个常数1。故  $\Gamma_F$  包围原点对应  $\Gamma_{GH}$  包围  $(-1, j0)$  点。

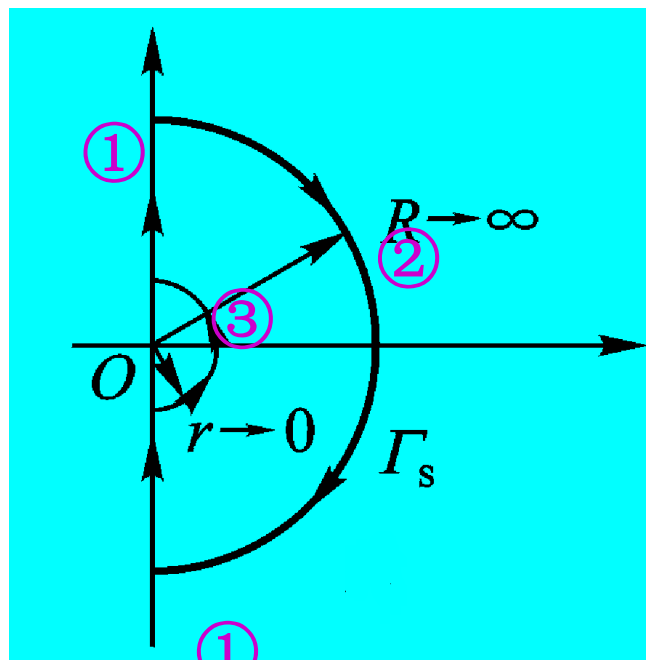
(3) 选择 $\Gamma_s$ :

$\Gamma_s$ 应包围 $F(s)$ 在 $s$ 右半平面的所有零极点。



①  $s = j\omega, \omega : -\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$

②  $s = \infty e^{j\theta}, \theta : +90^\circ \rightarrow 0 \rightarrow -90^\circ$



①

②

③

$s = \varepsilon e^{j\theta}, \varepsilon \rightarrow 0$

$\theta : -90^\circ \rightarrow +90^\circ$

(4)  $G(s)H(s)$  曲线的绘制

先来考察第一种情况的  $\Gamma_s$ :

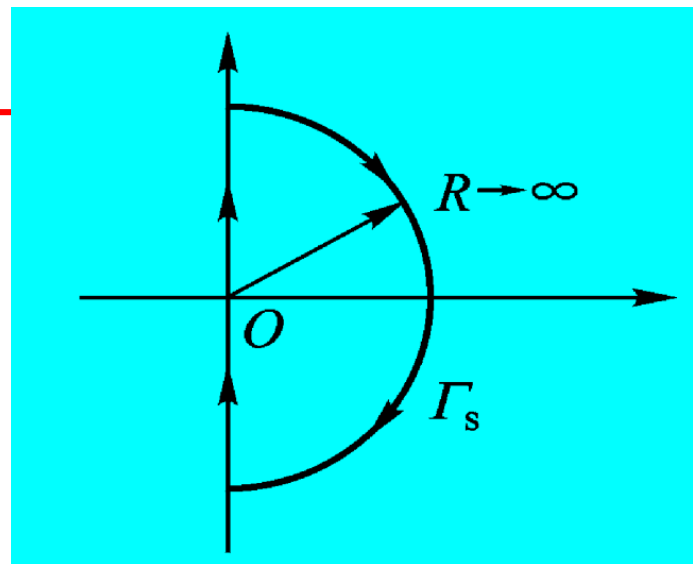
① 虚轴 ( $s=j\omega$ )

其在  $G(s)H(s)$  平面上的映射为  $G(j\omega)H(j\omega)$ ,  $\omega$  取值为  $-\infty \rightarrow +\infty$ 。

② 无穷大半圆:

其在  $G(s)H(s)$  平面上映射为  $G(j\omega)H(j\omega)$  的终点。

因此, 闭合的  $\Gamma_{GH}$  就是开环幅相曲线及其镜像。



考察有积分环节的 $\Gamma_s$ :

③无穷小半圆

$$s = \varepsilon e^{j\theta}, \varepsilon \rightarrow 0, \theta : -90^\circ \rightarrow +90^\circ$$

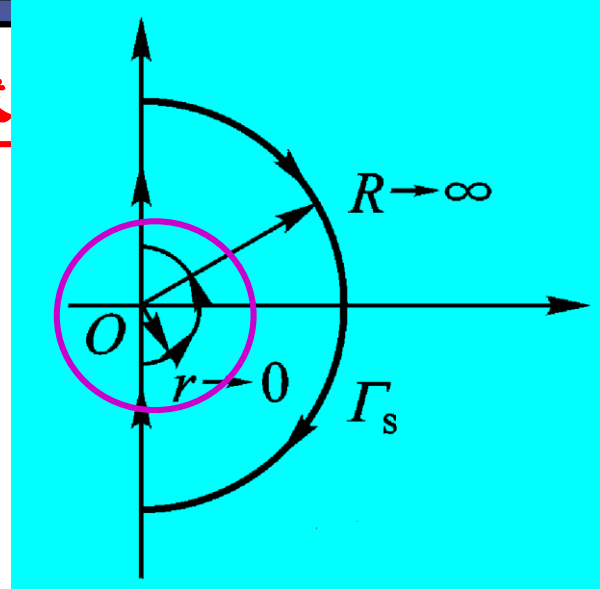
其在 $G(s)H(s)$ 平面上映射为无穷大圆弧。

$$G(s)H(s)|_{s \rightarrow 0} = \frac{K}{s^v} \triangleq \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^v} = \infty e^{j(-v\theta)}$$

模值为 $\infty$ ，相角： $v*90^\circ \rightarrow v*(-90^\circ)$  顺时针方向

$\omega : 0^- \rightarrow 0^+$  顺时针补画 $v/2$ 个无穷大圆。

$\omega : 0^+ \rightarrow 0$  逆时针补画 $v/4$ 个无穷大圆。



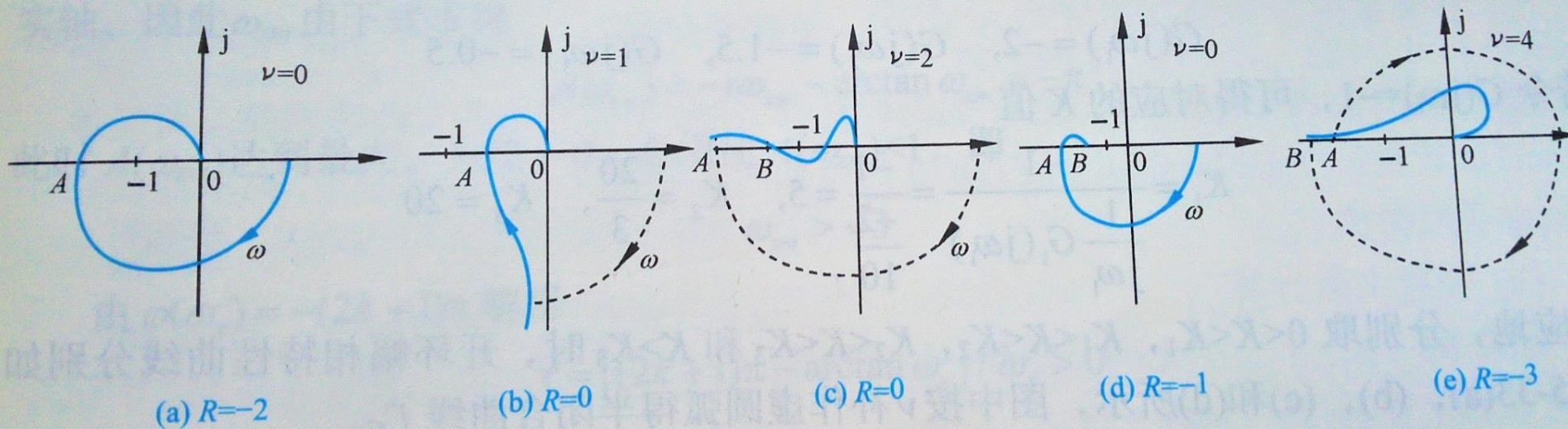
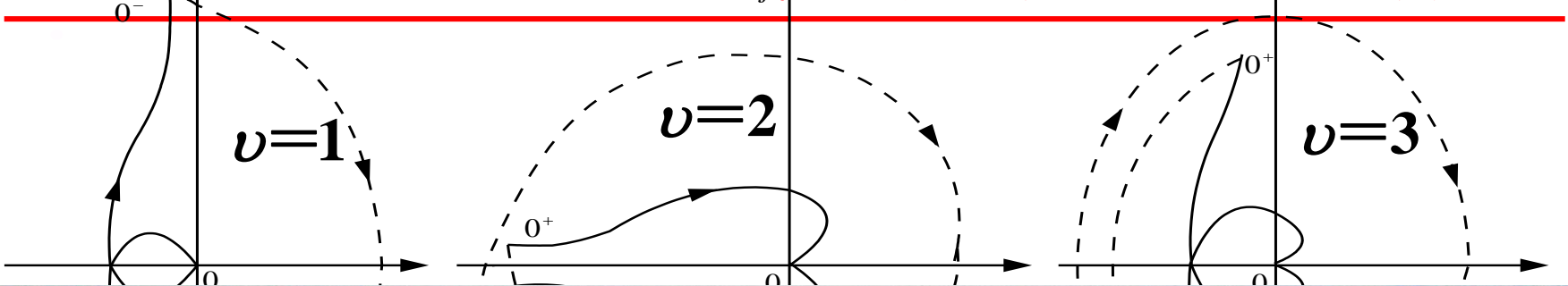


图 5-31 系统开环半闭合曲线  $\Gamma_{GH}$  与  $\Gamma_F$  包围原点的圈数  $R$

$\omega: 0 \rightarrow 0^+$

只需从  $\omega = 0^+$  出发逆时针补画  $\nu/4$  个半径为无穷大的圆。



## 2、奈氏判据——形式1

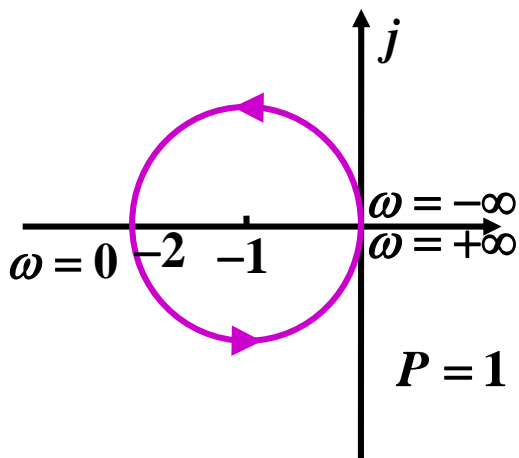
◆  $R=P-Z \rightarrow Z=P-R$

当 $Z=0$ 时闭环系统稳定，否则系统不稳定。

①P：开环传函在s右半平面的极点个数；

②R：当 $\omega$ 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时，其奈奎斯特曲线及其镜像对 $(-1, j0)$ 点的包围圈数。

③Z：闭环极点在s右半平面的个数。



系统稳定吗？

稳定

# 奈氏判据——形式2

◆  $Z=P-R=P-2N$  ( $R=2N=2(N_+-N_-)$ )

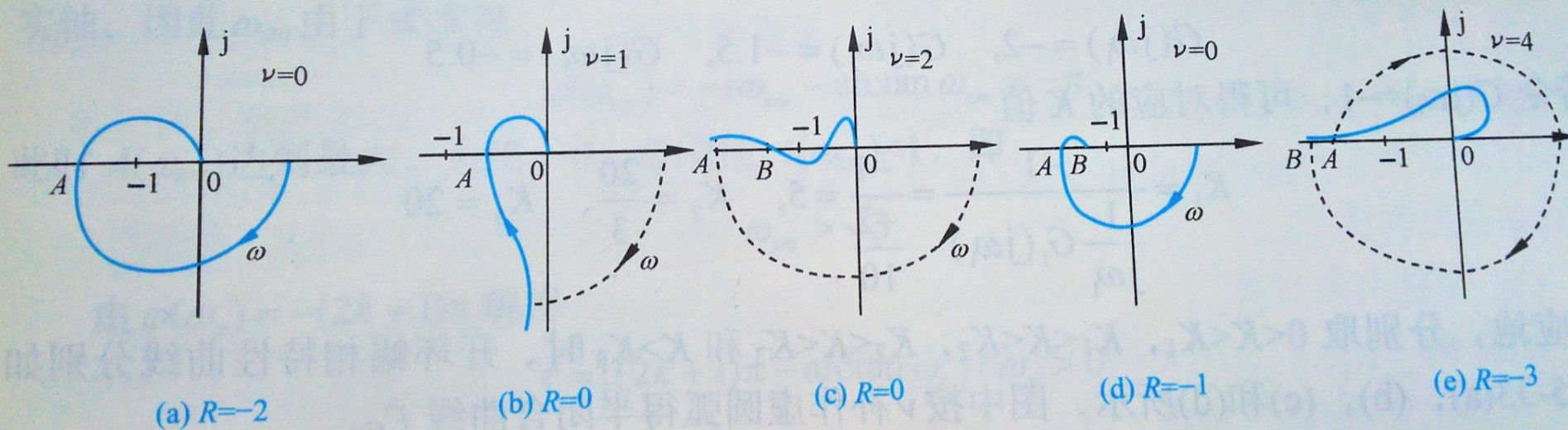


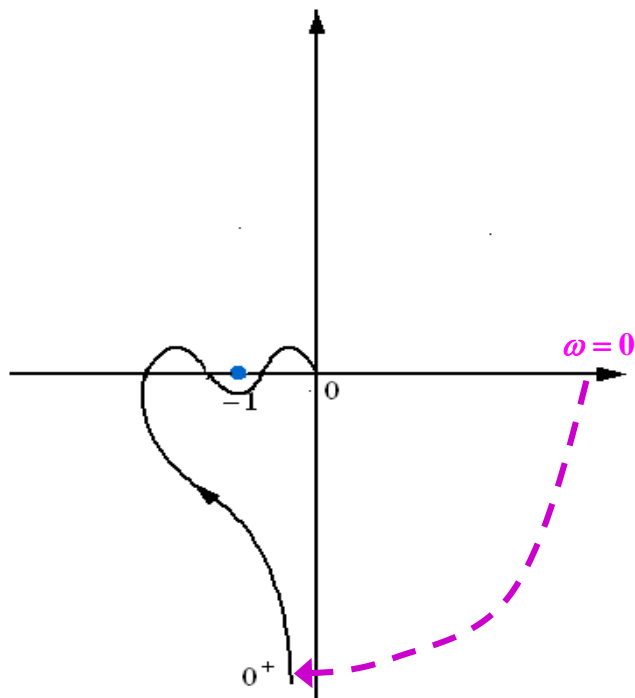
图 5-31 系统开环半闭合曲线  $\Gamma_{GH}$  与  $\Gamma_F$  包围原点的圈数 R

④ 系统稳定的充要条件： $Z=0 \rightarrow N=N_+-N_-=P/2$ 。

⑤ 若  $\Gamma_{GH}$  不包围仅穿过  $(-1, j0)$  点，则系统临界稳定。

判断图5-31中正负穿越的次数。

补例 某I型系统的开环频率特性如图所示，开环在右半s平面没有极点，试用奈氏判据判定系统的稳定性。



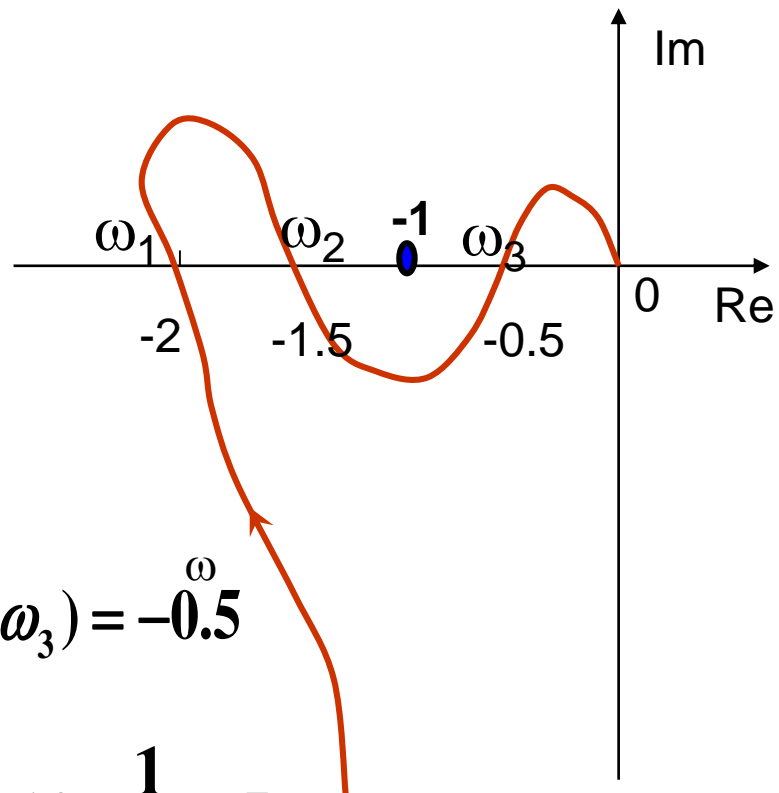
$$N_- = N_+ = 1$$

$$N_+ - N_- = 0 = P/2$$

故闭环稳定。

例5-7 已知单位负反馈系统的开环幅相曲线如下，其中  $K=10$ ,  $P=0$ ,  $v=1$ 。试确定系统稳定时  $K$  的取值范围。

解：因  $K$  的变化只影响幅频特性，且幅频随  $K$  成比例地变化。由图知当  $K=10$  时，



$$G_k(j\omega_1) = -2, G_k(j\omega_2) = -1.5, G_k(j\omega_3) = -0.5$$

则，当  $G_k(j\omega_1) = -1 \Rightarrow K = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

$$G_k(j\omega_2) = -1 \Rightarrow K = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$G_k(j\omega_3) = -1 \Rightarrow K = 20$$

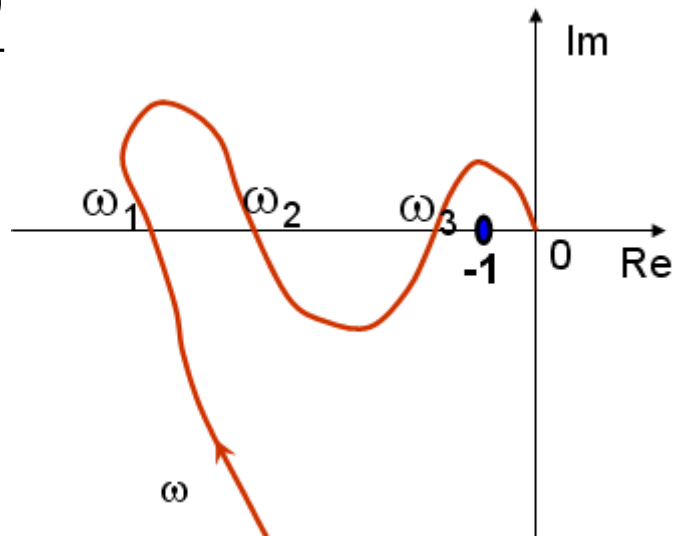
$0 < K < 5$ , 不包围  $(-1, j0)$  点, 系统稳定;

$5 < K < 20/3$ , 系统不稳定;

$20/3 < K < 20$ , 系统稳定;

$K > 20$ , 系统不稳定;

故系统稳定的K的取值范围为  $(0, 5)$  和  $(20/3, 20)$  .



### 3、对数频率稳定判据

对数频率稳定判据实质是将正负穿越应用至伯德图。

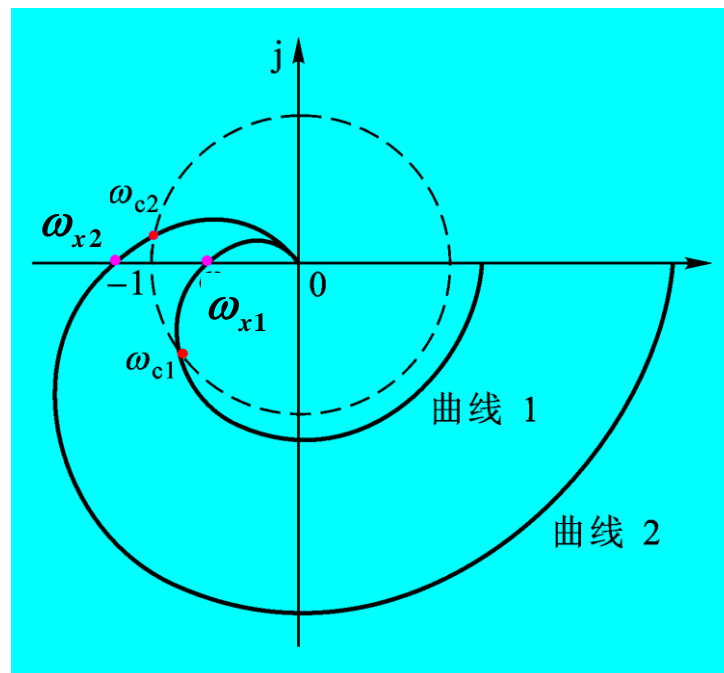
奈奎斯特图	伯德图
$(-1, j0)$	$L(\omega)=0, \phi(\omega)=-180^\circ$
$-\infty \rightarrow -1$	$L(\omega)>0, \phi(\omega)=-180^\circ$ <i><math>(2k+1)\pi</math></i>
$N'_+$ : 由第二象限进入第三象限	$L(\omega)>0$ 时, $\phi(\omega)$ 曲线穿越 $-180^\circ$ 线增加 <i><math>(2k+1)\pi</math></i>
$N'_-$ : 由第三象限进入第二象限	$L(\omega)>0$ 时, $\phi(\omega)$ 曲线穿越 $-180^\circ$ 线减小 <i><math>(2k+1)\pi</math></i>
半次穿越	$L(\omega)>0$ 时, $\phi(\omega)$ 曲线起始/终止于 $-180^\circ$ 线上的穿越 <i><math>(2k+1)\pi</math></i>

综上所述， $N_+$ 、 $N_-$ 在伯德图中的体现为在 $L(\omega) > 0$ 的所有频段内， $\phi(\omega)$ 曲线对 $-180^\circ$  【 $(2k+1)\pi$ 】的正负穿越次数。**对数稳定判据 P196下部**

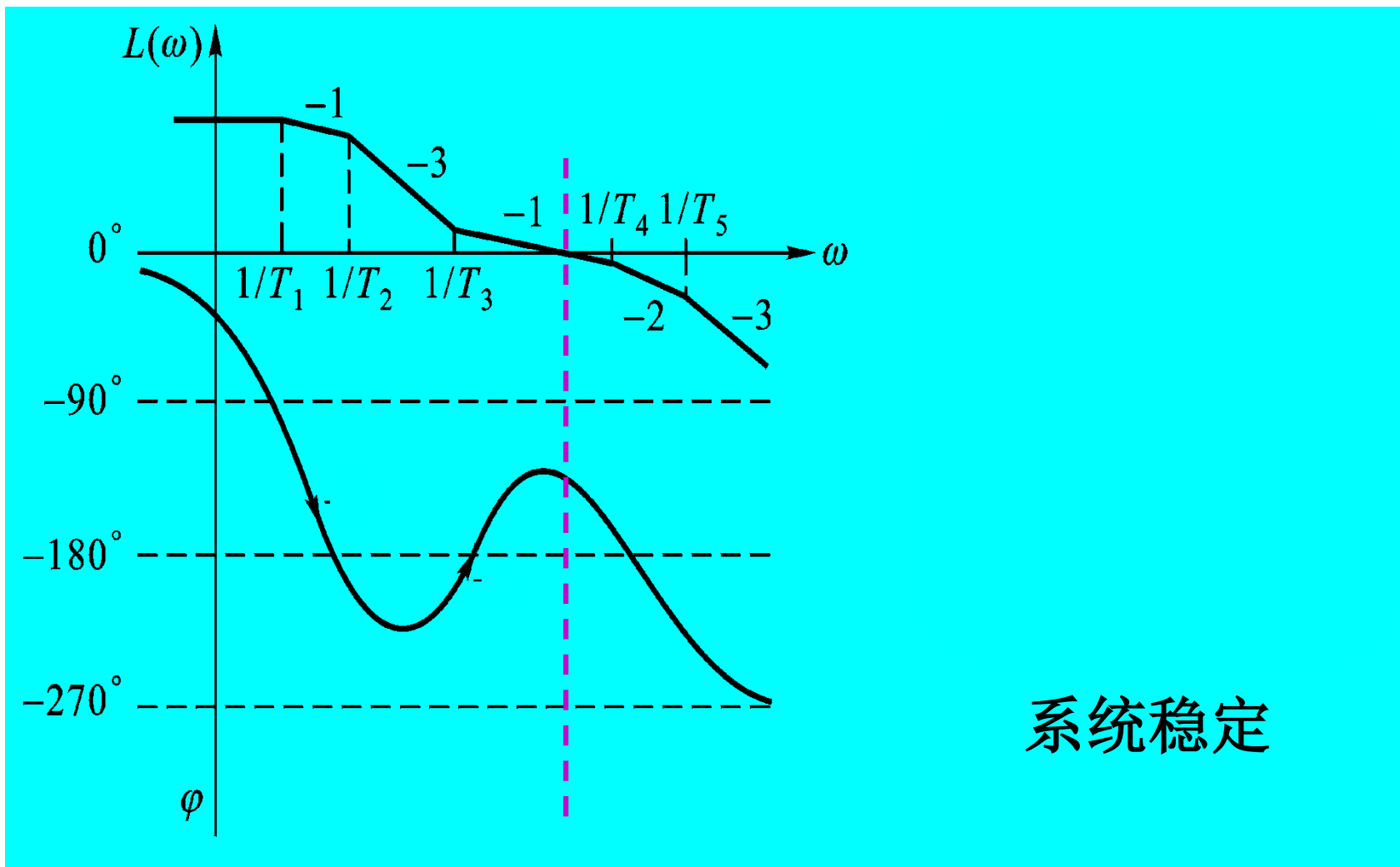
两个概念：**P195中部**

$A(\omega)=1$ 处的频率称为**截止频率**，记为 $\omega_c$ 。

$\phi(\omega) = -180^\circ$  【 $(2k+1)\pi$ 】处的频率称为**穿越频率**，记为 $\omega_x$ 。



例 已知开环稳定，频率特性曲线如下，判闭环稳定性。





例 5-10 已知开环系统型次  $\nu=3, P=0$ , 开环对数相频特性曲线如图 5-36 所示, 图中当  $\omega < \omega_c$  时,  $L(\omega) > L(\omega_c)$ , 试确定闭环不稳定极点的个数。

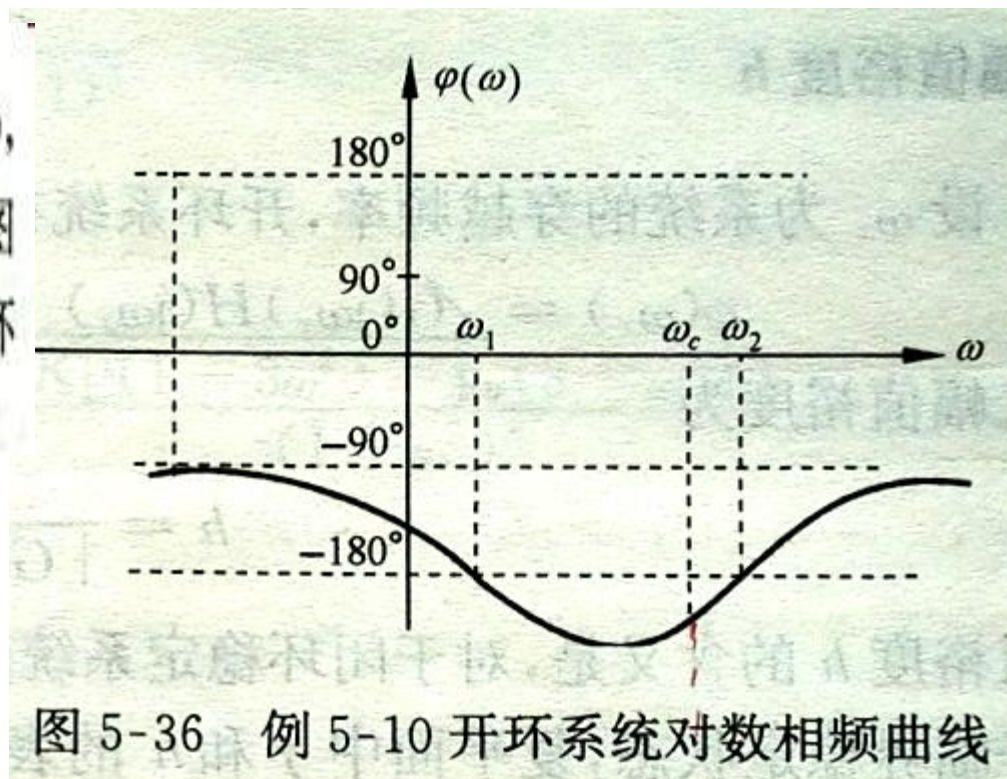


图 5-36 例 5-10 开环系统对数相频曲线

$$P=0$$

$$N_- = 3/2$$

$$N_+ = 0$$

$$Z = P - 2(N_+ - N_-) = 3$$

★由奈氏稳定判据判定闭环系统稳定性的步骤

1.求 $G_K(s)$ ,确定 $P$ 、 $\nu$ ;

2.绘制 $G_K(s)$ 的奈奎斯特曲线或伯德图;

3.当 $G_K(s)$ 含有积分环节时,在奈奎斯特曲线上补画 $\omega$ 从0到0+的大圆弧(方法:从0+处逆时针补画 $\nu/4$ 个半径为 $\infty$ 的圆弧);或在伯德图上补画 $\omega$ 从0到0+时的相角曲线(方法:在曲线的0+处向上做 $\nu$ 个 $90^\circ$ 的垂直虚线)。

4.用奈氏判据(正负穿越)判定闭环系统的稳定性。

## 4、条件稳定系统

### 1.条件稳定系统

闭环稳定有条件的系统成为条件稳定系统。

### 2.结构不稳定系统。

无论如何调整参数，系统总是闭环不稳定的，这样的系统为结构不稳定系统。

### 3.用“稳定裕度”度量系统的稳定程度。

# 作业

- 5-11 (1) (3) (5) (7) (9)